



# Méthodes de décomposition de domaine et de frontière immergée pour la simulation des composants nucléaires

Michel Belliard

## ► To cite this version:

Michel Belliard. Méthodes de décomposition de domaine et de frontière immergée pour la simulation des composants nucléaires. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Aix-Marseille université, 2014. tel-01085328v2

**HAL Id: tel-01085328**

**<https://hal.science/tel-01085328v2>**

Submitted on 6 Jan 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR : MÉCANIQUE,  
PHYSIQUE, MICRO ET NANOÉLECTRONIQUE E.D. 353

# HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

par

Michel Belliard

## MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE ET DE FRONTIÈRE IMMERGÉE POUR LA SIMULATION DES COMPOSANTS NUCLÉAIRES

H.D.R. soutenue le 19 novembre 2014 devant le jury composé de :

M.	ROLAND BECKER	Pr	Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur
M.	FRÉDÉRIC NATAF	D.R.	UPMC - Sorbonne Universités	Rapporteur
M.	STÉPHANE VINCENT	Pr	Université Paris-Est	Rapporteur
M.	PATRICK BONToux	D.R.	Laboratoire M2P2 - Marseille	Tuteur
M.	JEAN-MARC HÉRARD	Ing.-Senior	EDF-DRD Chatou	Examineur
M.	PIERRE SAGAUT	Pr	Aix-Marseille Université	Examineur



*À Isabelle*



# REMERCIEMENTS

**J**E voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à tous ceux qui ont contribué à mes travaux en tant que doctorants ou post-doctorants : I. Ramière, C. Introïni, C. Zaza et Y. Gorsse, sans oublier les stagiaires de Master. Je n'oublie pas non plus les chercheurs permanents ou associés de l'I2M (ex LATP) qui ont participé de près ou de loin à ce travail, en particulier, Ph. Angot, J.-M. Hérard, J.-C. Latché et J. Liandrat.

Je remercie également M. Grandotto, le chef du projet Génépi, qui m'a toujours soutenu dans la recherche de l'optimisation numérique du logiciel Génépi, ainsi que le CEA, AREVA et tous les partenaires du projet Neptune qui ont financé ce travail.

Je suis également reconnaissant envers ma hiérarchie – en particulier B. Faydide et D. Jamet – qui m'a donné la possibilité de rédiger ce mémoire en vue de mon HDR. Je remercie encore P. Bontoux du M2P2 qui depuis longtemps s'intéresse à mes travaux, m'a introduit dans son laboratoire et a accepté d'être mon tuteur. Merci aussi à mes relecteurs et mes rapporteurs, ainsi qu'à tous les membres de mon jury d'HDR.

J'en profite pour saluer mes copains F. Lebon et B. Torrèsani qui, depuis les bancs de la Faculté, m'ont accompagné sur le chemin de la recherche scientifique. Enfin, je conclurai en remerciant de tout cœur Isabelle qui m'a toujours encouragé dans cette démarche et est un support dans la vie de tous les jours.

Cadarache, le 6 janvier 2015.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
PRÉFACE	1
INTRODUCTION	3
1 DÉCOMPOSITION SPATIALE DE DOMAINE	9
1.1 CONTEXTE	11
1.1.1 Enjeux et motivations	11
1.1.2 Objectifs et approche générale	11
1.2 MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE	12
1.2.1 Introduction	12
1.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel	13
1.2.3 Algorithmes de Dirichlet-Neumann et de Dirichlet-Neumann adapté	14
1.3 APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR	16
1.3.1 La décomposition de domaine comme préconditionneur	18
1.3.2 Recouvrement et stabilité	19
1.3.3 Performances en parallèle	22
CONCLUSION	27
2 DÉCOMPOSITION FRÉQUENTIELLE DE DOMAINE (MULTI-GRILLES)	29
2.1 CONTEXTE	31
2.1.1 Enjeux et motivations	31
2.1.2 Objectifs et approche générale	31
2.2 MÉTHODES MULTI-GRILLES	31
2.2.1 Introduction	32
2.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel	34
2.2.3 Un Algorithme pseudo-FMG FAS en séquentiel et en parallèle	35
2.3 APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR	39
2.3.1 Cycle dynamique et convergence	39
2.3.2 Parallélisme	41
2.3.3 Sensibilité de l'algorithme aux paramètres de calcul	41
CONCLUSION	41
3 RAFFINEMENT LOCAL MULTI-NIVEAUX	43
3.1 CONTEXTE	45
3.1.1 Enjeux et motivations	45
3.1.2 Objectifs et approche générale	45
3.2 MÉTHODES DE RAFFINEMENT LOCAL MULTI-NIVEAUX	46
3.2.1 Introduction	46
3.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel	46
3.2.3 Correction locale du résidu (méthode LDC)	48

3.2.4	Correction de flux à l'interface (méthode FIC) . . . . .	50
3.3	APPLICATIONS EN THERMIQUE ET AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR . . . . .	53
3.3.1	Applications en thermique . . . . .	53
3.3.2	Applications au générateur de vapeur . . . . .	54
	CONCLUSION . . . . .	59
4	DOMAINES FICTIFS . . . . .	61
4.1	CONTEXTE . . . . .	63
4.1.1	Enjeux et motivations . . . . .	63
4.1.2	Objectifs et approche générale . . . . .	63
4.2	MÉTHODES DE DOMAINES FICTIFS . . . . .	64
4.2.1	Introduction . . . . .	64
4.2.2	Pistes de recherche et cadre logiciel . . . . .	65
4.2.3	Modification local du schéma : la méthode FIC-JEBC . . . . .	66
4.2.4	Modification local de l'équation : les méthodes FE-ISI et PDF . . . . .	68
4.3	APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR ET EN HYDRODYNAMIQUE . . . . .	70
4.3.1	Générateur de vapeur . . . . .	70
4.3.2	Creuset froid nucléarisé . . . . .	71
	CONCLUSION . . . . .	73
	CONCLUSION GÉNÉRALE – PERSPECTIVES DE RECHERCHE . . . . .	75
A	ANNEXES . . . . .	79
A.1	UNE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE BILAN DU MODÈLE HEM . . . . .	81
A.2	MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE . . . . .	83
A.3	NOTIONS LIÉES AU PARALLÉLISME . . . . .	85
A.4	PRÉCISION DES CALCULS GV EN DÉCOMPOSITION DE DOMAINE . . . . .	86
A.5	MÉTHODES MULTI-GRILLES ALGÈBRIQUES . . . . .	88
A.6	PRÉCONDITIONNEUR ONDELETTE/MULTI-RÉSOLUTION . . . . .	89
A.7	ANALYSE DE L'ALGORITHME MULTI-GRILLES PARALLÈLE EN DAMIERS . . . . .	90
A.8	ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DE L'ALGORITHME BI-GRILLES PSEUDO-FMG FAS . . . . .	91
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	93
	NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS . . . . .	101





# PRÉFACE

L'objet de ce document est de présenter mes travaux de recherche en vue de l'Habilitation à Diriger les Recherches, HDR, travaux réalisés au sein du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA). Cette HDR s'inscrit dans une démarche de progression dans la filière *Expertise* du CEA.

Dans le contexte industriel lié au nucléaire, à l'aéronautique, à l'automobile, . . . , la simulation numérique est un outil en passe de devenir omnipotent, que ce soit pour les études de conception ou pour celles concernant la sûreté. Elle intervient, bien sûr, dans les différents stades d'élaboration d'un produit (géométrie, maillage, simulation fonctionnelle, analyse, . . . ) et tend également à remplacer autant que faire se peut le recours à l'expérimentation ; celle-ci restant généralement onéreuse. De même, dans le domaine de la sûreté, il est parfois impossible de réaliser des expériences – dégradation d'un coeur de centrale nucléaire par exemple. De fait, la simulation numérique est l'unique recours possible.

Toutefois, la simulation numérique réclame des moyens informatiques de plus en plus conséquents. Elle devient de plus en plus multi-physique ou multi-échelle et la taille des problèmes abordés ne cesse de croître. L'augmentation des capacités informatiques a permis et accompagné le développement de la simulation. Le parallélisme est déjà massivement présent dans les centres de calculs universitaires ou des EPST/EPIC, mais également de plus en plus dans les laboratoires ou services "calculs" des industriels. Cependant, le recours à des méthodes numériques permettant de réduire le coût des calculs – en temps CPU (*Central Processing Unit*) et en terme de mémoire utilisée – est indispensable. En effet, malgré la puissance croissante des ordinateurs, des méthodes numériques sous optimales limitent les simulations et ne permettent pas de maximiser le bénéfice d'une architecture informatique de type répartie (ordinateurs parallèles). Dans ce cadre, les méthodes de décomposition de domaine en espace, les méthodes multi-grilles et celles de domaine fictif – ou de frontière immergée – sont des outils de choix. Par la définition de problèmes locaux ou la modification de la géométrie du domaine de calcul, elles permettent de simplifier le problème à résoudre en terme de nombre de degrés de liberté, de maillage, de stockage des données nécessaires à la résolution, . . .

De telles méthodes sont particulièrement intéressantes dans le contexte de la simulation numérique de la physique des centrales nucléaires où la tendance est de tendre vers la simulation globale de celles-ci : simulation détaillée des composants thermohydrauliques (coeur et générateurs de vapeur), du système (tuyaux, piquages, pompes, pressuriseur, capacités, régulations et contrôles commandes, . . . ), des réactions neutroniques et de la thermo-mécanique du combustible.

Dans ce document, nous nous restreignons à la simulation de la thermohydraulique des composants (en privilégiant plus le générateur de vapeur). Dans le but de réaliser des simulations les plus fines possibles de ces composants industriels à moyens informatiques donnés, mes travaux s'inscrivent naturellement dans ces deux grands types d'approches : décomposition en espace et/ou en échelle et domaines fictifs. La première permet d'optimiser le temps de calcul et les ressources en mémoire pour une discrétisation fixée, que ce soit pour le calcul complet du composant nucléaire ou seulement d'une partie de celui-ci. La seconde consiste à réaliser les calculs sur des maillages cartésiens, voire de les remplacer par des tableaux indicés. Cela concourt à l'utilisation de méthodes de résolutions rapides – donc également à l'optimisation du temps et de l'espace mémoire – et permet de décrire des géométries mobiles et/ou déformables de façon aisée – sans remaillage du domaine de calcul. Vis-à-vis de ces deux approches, mes travaux ont consisté à les introduire dans le cercle des logiciels pour la simulation industrielle des composants nucléaires ou des procédés pour l'industrie nucléaire,

soit en participant directement à leur élaboration, soit en adaptant et en optimisant leur utilisation dans ce domaine d'activités.

Enfin, je tiens à préciser que le travail présenté ici bénéficie des contributions de mes collaborateurs doctorants et post-doctorants.

# INTRODUCTION

LES centrales nucléaires à eau pressurisée déployées en France, cf. Fig. 1, comportent un cœur et, suivant les modèles, trois ou quatre générateurs de vapeur, GV, appelés aussi évaporateurs.

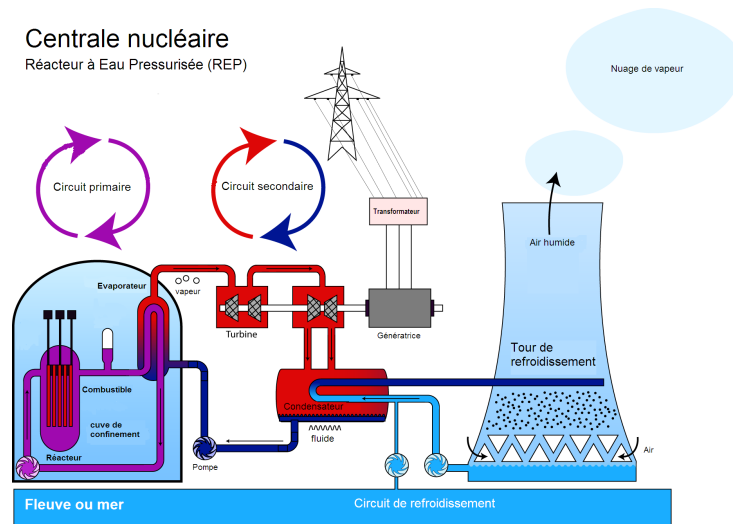


FIG. 1 – Conception d’une centrale nucléaire avec un Réacteur à Eau Pressurisée (Par Steffen Kuntzoff; traduction de Enr-v [CC-BY-1.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by/1.0>)], via Wikimedia Commons).

Un GV est un échangeur thermique entre l’eau du circuit primaire portée à haute température ( $320\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) – fluide *chaud* – et à pression élevée (155 bar) dans le cœur du réacteur et l’eau du circuit secondaire ( $280\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) – fluide *froid* – qui se transforme en vapeur et alimente la turbine. Ce composant, à l’intérieur de l’enceinte de confinement nucléaire, consiste en une capacité cylindrique, cf. Fig. 2 à gauche, d’une hauteur d’environ 10 m et d’un diamètre de l’ordre de 3 m, parcourue par un “faisceau tubulaire” composé de 3 300 à 5 600 tubes en U inversé, espacés d’environ 1 cm et soutenus par des plaques de supportage. Le fluide primaire circule dans ces tubes. La capacité est alimentée par le fluide secondaire qui se met à bouillir au contact des tubes en U, cf. Fig. 3.

Le cœur du réacteur, bien que différant dans sa conception, possède des caractéristiques thermohydrauliques proches de celles du générateur de vapeur : l’écoulement du fluide primaire à travers un *down-comer* annulaire, un zone cylindrique de chauffage de ce fluide au travers d’un faisceau de tubes combustibles verticaux avec des grilles de mélange, un plénum supérieur, ... Un tube combustible a des dimensions du même ordre que celles d’un tube de générateur (rayon centimétrique et hauteur de quelques mètres) et le faisceau comporte également plusieurs milliers de tubes, cf. Fig. 2 à droite. Les principales différences résident dans le mode de chauffage – neutronique ou par échange thermique avec le fluide primaire – et l’état monophasique ou diphasique du fluide en fonctionnement normal.

En plus de son rôle crucial pour le rendement thermique de la centrale, le générateur de vapeur contribue, avec le cœur du réacteur, à la seconde barrière de confinement (le circuit primaire) vis-à-vis de la rétention de la radioactivité. En effet, comme il permet de réaliser l’échange thermique entre le fluide primaire liquide et le fluide secondaire, tout ce qui peut conduire à réduire cet échange dégrade les performances de la centrale – tubes primaires

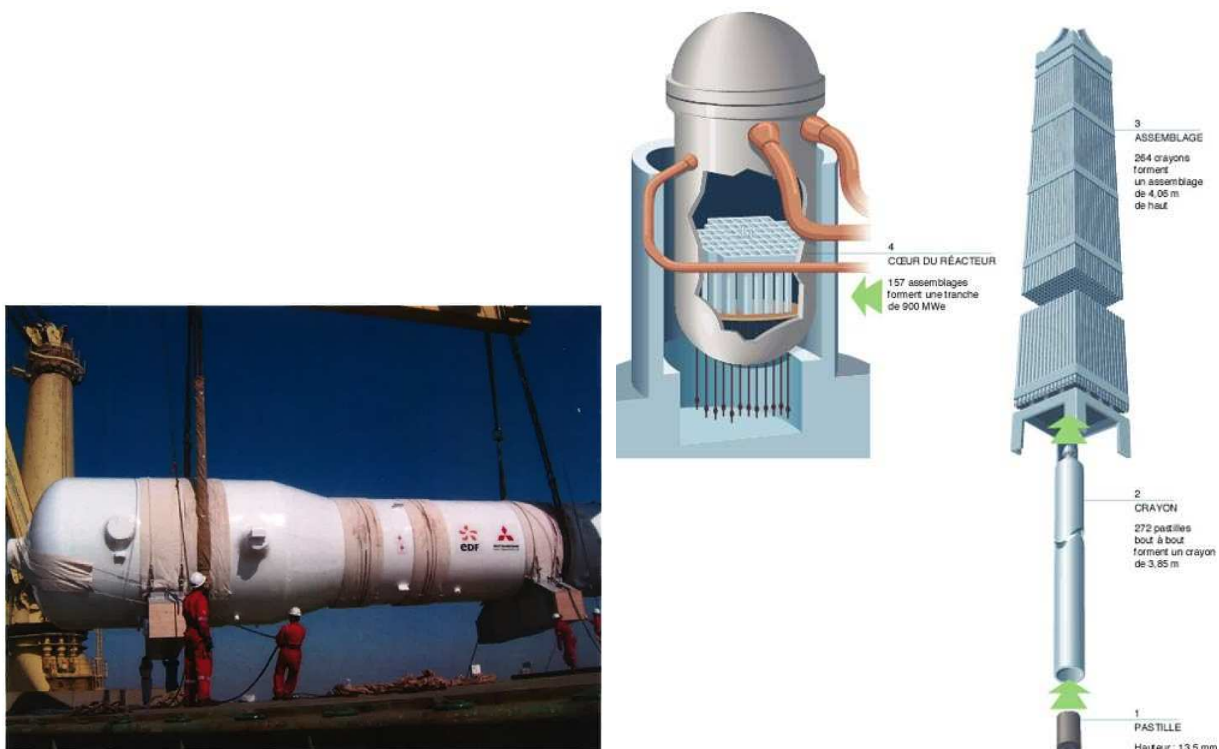


FIG. 2 – Les composants nucléaires. A gauche : vue d'un générateur de vapeur de Mitsubishi pour EDF. A droite : schéma d'un cœur de réacteur à eau pressurisée. "Cet éclaté montre le détail d'un assemblage de combustible. Inséré dans le cœur du réacteur, chaque assemblage est constitué de 264 crayons d'environ 4 m de long, chaque crayon étant formé d'un empilement de 272 pastilles d'oxyde d'uranium ou de plutonium enrobées d'une gaine à base de zirconium. Des tubes guides sont également prévus pour l'insertion dans les assemblages des barres de contrôle pour le pilotage du réacteur. Les différences pièces de structures - grilles, embouts - qui assurent la cohésion mécanique de l'assemblage sont également en matériaux peu absorbants pour les neutrons. ©COGEMA" (<http://www.laradioactivite.com/fr/site/pages/assemblagesdereacteursrep.htm>)

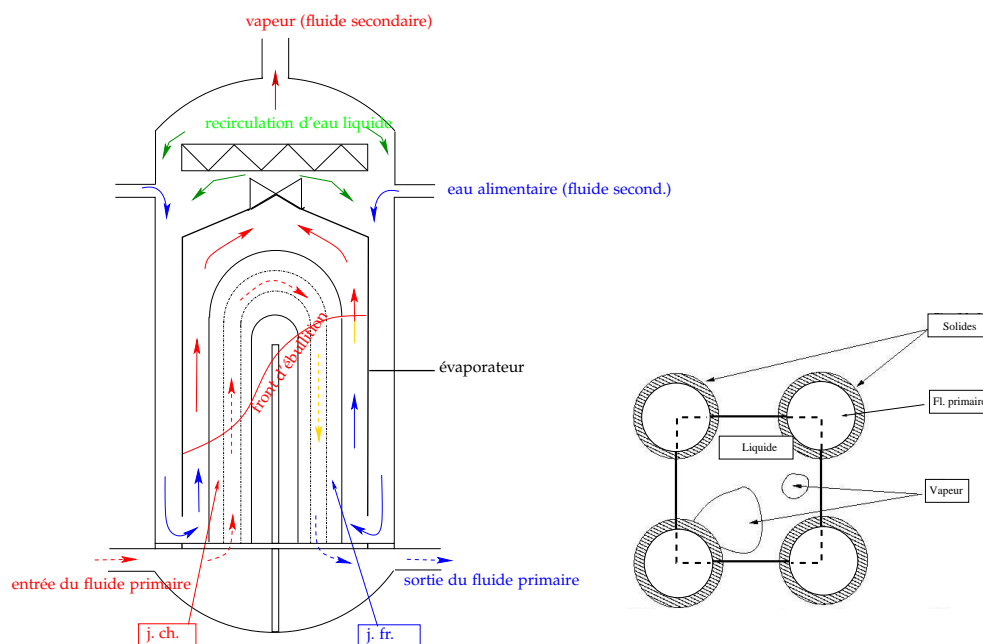


FIG. 3 – Schéma d'un générateur de vapeur (j. ch. : jambe chaude ; j. fr. : jambe froide) et cellule d'homogénéisation (motif élémentaire dans le cas d'un faisceau à pas carré ; coupe horizontale entre 4 tubes).

bouchés, gonflement des tubes conduisant à la réduction du passage du fluide, .... De plus, le fluide primaire étant confiné à l'intérieur des tubes en U, toute atteinte à l'intégrité de ceux-ci conduirait à relâcher des radio-éléments potentiels dans le circuit secondaire, hors de l'enceinte nucléaire. Lors du fonctionnement du réacteur, les faisceaux tubulaires des générateurs de vapeur sont soumis à des vibrations induites par l'écoulement turbulent du fluide secondaire. Ces vibrations peuvent générer une fissuration circonférentielle par fatigue, dont l'évolution est très rapide. Afin de limiter l'amplitude de ces vibrations et de prévenir ce type de dégradation, certains tubes sont maintenus dans leur partie supérieure par des barres anti-vibratoires. Au cours de la fabrication des générateurs de vapeur, certaines de ces barres peuvent être mal positionnées, entraînant un défaut de maintien des tubes. Ces tubes sont appelés "tubes en anomalie de supportage". Plusieurs ruptures complètes de tubes de générateurs de vapeur, ayant pour origine une fissuration par fatigue vibratoire de tubes en anomalie de supportage, se sont produites à North Anna 1 et Indian Point 3 (USA) en 1987 et 1988, à Mihama (Japon) en 1991, ainsi que des ruptures partielles comme à San Onofre 3 (USA) en 2012.

L'étude du fonctionnement de ce composant est donc primordiale pour le concepteur et l'exploitant de centrales nucléaires. Cependant, sa simulation numérique se heurte aux capacités encore limitées des ordinateurs. L'idéal serait de pouvoir modéliser le fluide secondaire diphasique s'écoulant entre les tubes, l'échange thermique local avec le fluide primaire, l'interaction des tubes avec le fluide secondaire, l'apparition des bulles de vapeur et leur devenir dans le composant. . . La dimension caractéristique des bulles de vapeur est typiquement de l'ordre du demi centimètre, celle du diamètre des tubes en U du centimètre et celle du composant de la dizaine de mètre. Un maillage millimétrique nécessiterait des dizaine de milliards de mailles pour discrétiser le GV. De fait, les simulations industrielles des générateurs de vapeur utilisent des techniques d'homogénéisation ou prise de moyenne, cf. Fig. 3, et décrivent le fluide diphasique comme un mélange équivalent se déplaçant dans un milieu modélisé comme poreux. Deux modélisations basées sur ces techniques sont fréquemment rencontrées dans le contexte des simulations industrielles : *Homogeneous Equilibrium Model*, HEM, et *Homogeneous Relaxation Model*, HRM; cf. Clerc (2000) par exemple. La première fait l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique et mécanique des phases, alors que la seconde tient compte d'éventuels déséquilibres entre les phases. Suivant le modèle, on résoudra trois ou quatre (voire cinq) équations de conservation. Pour le modèle HEM, on s'intéresse aux bilans de masse, quantité de mouvement, QDM, et enthalpie pour le mélange. Pour le modèle HRM, on rajoute la prise en compte du bilan de masse d'une des deux phases – généralement le gaz, comme c'est le cas pour le logiciel cœur Flica-4 du CEA (Toumi et al. 2000) – pour pouvoir décrire un déséquilibre thermodynamique. Mais il est aussi possible, comme pour la simulation du générateur de vapeur, de modéliser ce déséquilibre via une loi de fermeture algébrique décrivant la sous-saturation éventuelle du liquide. La prise en compte d'un déséquilibre mécanique nécessiterait de considérer une équation supplémentaire de bilan de quantité de mouvement, voir Grandotto et Obry (2005) par exemple.

Pour le générateur de vapeur<sup>1</sup>, les équations de bilan du mélange (bilan de masse, de QDM et d'enthalpie), après application de la technique d'homogénéisation HEM, peuvent s'exprimer de la façon suivante, cf. Grandotto et al. (1989), Grandotto et Obry (1996) :

---

<sup>1</sup>ou la cuve

$$\partial_t(\beta\rho) + \nabla \cdot \beta \mathbf{G} = 0, \quad (1)$$

$$\beta\rho\partial_t\mathbf{V} + \beta\mathbf{G} \cdot \bar{\bar{\nabla}}\mathbf{V} - \nabla \cdot \beta\mu_T(\nabla\mathbf{V} + \nabla^T\mathbf{V}) = -\beta\nabla P + \beta\rho\mathbf{g} - \beta\bar{\bar{\Lambda}}\mathbf{V} - \nabla \cdot (\beta x(1-x)\rho\mathbf{V}_R \otimes \mathbf{V}_R), \quad (2)$$

$$\beta\rho\partial_t H + \beta\mathbf{G} \cdot \nabla H - \nabla \cdot (\beta\chi_T \nabla H) = \tau Q - \nabla \cdot (\beta x(1-x)\rho\mathcal{L}\mathbf{V}_R), \quad (3)$$

où  $\beta$  est la porosité du milieu,  $\tau$  le taux de présence du faisceau supposé indépendant du temps,  $\rho(H, P)$  la densité,  $\mathbf{G}$  le flux de masse,  $\mathbf{V}$  la vitesse,  $P$  la pression,  $\mathbf{g}$  la gravité,  $\bar{\bar{\Lambda}}$  le tenseur de frottement sur les obstacles,  $x(H, P)$  le titre statique,  $\mathbf{V}_R(H, P)$  la vitesse relative (Zuber et Findlay 1965, Lellouche et Zolotar 1982),  $H$  l'enthalpie spécifique du mélange,  $Q(H, P)$  le terme source de chaleur,  $\mathcal{L}(P)$  la chaleur latente et  $\chi_T = \mu_T P_r$  et  $\mu_T = a|\mathbf{G}|L$  les coefficients de diffusion turbulente avec  $a$  le coefficient de Schlichting,  $L$  une longueur typique de tourbillon,  $P_r$  le nombre de Prandtl et  $|\cdot|$  la norme Euclidienne (Schlichting 1968). Dans ces équations de bilan, certains termes ont été négligés et n'apparaissent donc pas ici, comme les termes en pression dans le bilan d'enthalpie ou les dissipations visqueuses. Les termes  $\beta x(1-x)\rho\mathcal{L}\mathbf{V}_R$  et  $\beta x(1-x)\rho\mathbf{V}_R \otimes \mathbf{V}_R$  sont appelés termes de dérive. Ils caractérisent le transfert d'énergie et de quantité de mouvement entre le gaz et le liquide. Le terme source de chaleur  $Q$  est donné par la résolution de l'équation du bilan d'énergie du fluide primaire. Dans le cas du générateur de vapeur, les bilans du mélange sont à compléter par le bilan d'énergie du fluide primaire :

$$\rho_p C_p \partial_t T_p + \rho_p C_p \mathbf{V}_p \cdot \nabla T_p - \nabla \cdot (C_p \chi_{T_p} \nabla T_p) = -Q/\beta_{p0}, \quad (4)$$

où  $\rho_p$  est la densité,  $\mathbf{V}_p$  la vitesse,  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante et  $\chi_{T_p}$  le coefficient de diffusion turbulente du fluide primaire.  $\beta_{p0}$  est la porosité intrinsèque du faisceau primaire (i.e. loin des bord du faisceau). Le fluide primaire est considéré comme un liquide isobare et incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{V}_p = 0$ ) dont la vitesse ne dépend pas du temps. Le métal des tubes primaires est considéré comme sans inertie thermique. La puissance échangée entre le fluide primaire et le fluide secondaire s'écrit :

$$Q = \gamma_0 h_{eq} (T_p - T_w) \quad (5)$$

où  $\gamma_0$  est la densité de surface chauffante du faisceau,  $h_{eq}$  le coefficient d'échange équivalent entre le primaire et le secondaire et  $T_w$  la température des tubes du faisceau coté secondaire. Ces équations sont proches de celles de Navier-Stokes pour un fluide dilatable. Elles en diffèrent par la présence d'un terme de porosité, ainsi que par des termes sources particuliers. Comme les coefficients dépendent des inconnues, ces équations sont aussi fortement non linéaires.

Une résolution possible de ce système d'équations aux dérivées partielles est présentée en Annexe A.1 et codée dans le logiciel Génepi du CEA (Grandotto et Obry 1996). Succinctement, on recherche le régime stationnaire par des itérations en temps, qui peuvent être vues comme des itérations relaxées de Picard, en résolvant successivement les bilans (4), (3) et (2)-(1). Pour résoudre les bilans (2)-(1), on utilise un algorithme de projection de type incompressible :  $\nabla \cdot (\beta\rho\mathbf{V}) = 0$ .<sup>2</sup> La discrétisation en temps des Eqs (2), (3) et (4) est faite par la méthode de Crank-Nicholson et la discrétisation spatiale via les éléments finis de type Q1 (vitesse, enthalpie, température) et Q0 (pression)<sup>3</sup>. Au cours de chaque itération de Picard, les systèmes linéaires résultants de cette discrétisation sont lissés et non résolus exactement

<sup>2</sup> $\partial_t(\beta\rho)$  est négligé.

<sup>3</sup>La forte diffusion introduite par les valeurs importantes de  $\mu_T$  (et  $\chi_T$ ) contribue à la stabilisation de cette discrétisation spatiale.

afin de réduire le temps des calculs. La pression est quant à elle résolue de façon exacte pour assurer la conservation de la masse et c'est le principal poste en coût du calcul, surtout pour des maillages ayant de nombreux degrés de liberté.

L'échelle de l'homogénéisation du fluide diphasique correspond à minima à la taille du motif élémentaire, soit environ deux centimètres. A cette échelle, une dizaine de millions de mailles<sup>4</sup> sont encore nécessaires à une simulation détaillée du générateur de vapeur. On voit donc que la clef d'une simulation précise est la capacité à résoudre un grand nombre d'inconnues – si possible de l'ordre de quelques millions – en un temps raisonnable pour l'ingénieur. C'est l'objectif de ce travail de recherche ...

Mes contributions à cet objectif portent sur les domaines suivants.

Une première partie des recherches que j'ai effectuées relève des méthodes de décomposition de domaine, en espace ou en fréquence. En effet, pour que les simulations soient réalisables avec les mémoires des ordinateurs actuels, on a été amené à partitionner le domaine de calcul en sous-domaines – méthode de décomposition de domaine en espace ; chaque sous-domaine utilise alors la mémoire d'un noeud informatique en réseau. Cela a également un impact positif sur le temps de restitution des calculs – calculs pouvant s'effectuer en parallèles, problème mieux conditionné. Dans ce cadre, une composition originale de méthodes de décomposition de domaine a été proposée pour le système d'équations (1)-(4). D'autre part, pour accélérer la résolution d'un gros problème, on peut aussi envisager de décomposer en échelle le domaine de calcul – basses/hautes fréquences spatiales – comme le proposent les méthodes multi-grilles. Dans ce cas, une approximation obtenue sur un maillage grossier permet d'obtenir plus rapidement une approximation précise de la solution sur un maillage fin du domaine de calcul. Du point de vue de la mise en œuvre, le processus itératif pour passer d'un maillage à l'autre est le plus souvent de type séquentiel. Cependant, on a proposé et testé avec succès une approche parallèle de type *en damier* sur trois grilles.

Par ailleurs, l'ingénieur s'intéresse souvent à une zone particulière du composant – par exemple pour le GV : entrée du fluide secondaire dans l'évaporateur, plaque de distribution de débit, passage du fluide entre les tubes et une plaque de supportage, région dite du *chignon* formée par le haut des tubes primaires, ... Les techniques de raffinement local sont donc utiles pour ne pas alourdir le calcul par un maillage fin de l'ensemble du domaine. C'est le but des méthodes de raffinement local multi-niveaux *Local Defect Correction*, LDC, *Flux Interface Correction*, FIC. Une version de la méthode LDC, adaptée à notre système d'équations fortement non linéaires, a été incorporée dans un algorithme parallèle. Par ailleurs, la méthode FIC a été revisitée pour la problématique du raffinement local en présence d'une frontière immergée (FIC-EBC).

Enfin, une seconde partie de mes recherches concerne le concept de domaine fictif, dans lequel le domaine de calcul est immergé dans un domaine géométriquement plus simple<sup>5</sup>, ce qui permet la mise en œuvre de solveurs rapides, de techniques multi-résolution ou de méthode de frontières mobiles (interaction fluide/structure) indépendamment de la géométrie réelle du domaine. De nouvelles méthodes de domaines fictifs ont été développées pour des conditions aux limites de type Dirichlet et de type Robin en éléments finis, EF, et en volumes finis, VF.

Ces différentes techniques – décomposition de domaine, multi-grilles, raffinement local multi-niveaux et domaine fictif – peuvent être appliquées simultanément pour obtenir la

---

<sup>4</sup>Pas du faisceau au cube  $\approx 2 \cdot 10^{-2} m$ ; soit un volume de  $10^{-5}$  à  $10^{-6} m^3$  par cellules.

<sup>5</sup>Et donc, maillé plus simplement.



simulation la plus performante possible.

Le plan de ce mémoire est le suivant.

Le *premier chapitre* expose la problématique de la décomposition spatiale de domaine et la description des méthodes mises en œuvre de type Dirichlet-Neumann pour la résolution du système d'équations non-linéaires de bilan dans un GV. Contrairement aux chapitres suivants, les résultats que j'ai obtenus sont présentés ici de façon plus exhaustive et détaillée. En effet, une grande partie de ceux-ci sont contenus dans des rapports internes au CEA et non accessibles dans la littérature ouverte.

Le *deuxième chapitre* est dédié, quant à lui, à la décomposition fréquentielle de domaine et à la méthode multi-grilles de type *Full Approximation Storage* utilisée pour résoudre ces mêmes bilans.

Un *troisième chapitre* décrit les méthodes de raffinement local multi-niveaux, issues de l'hybridation des méthodes de décomposition en espace et en fréquence, permettant une description localement plus fine d'une partie du composant nucléaire.

Enfin, le contexte de l'approche domaine fictif et la description des méthodes originales développées ici constitue le corps du *quatrième chapitre*. Les applications de ce dernier chapitre se situent dans le cadre plus large de la mécanique des fluides diphasiques ou monophasiques.

D'une façon générale, on s'attache dans chacun de ces chapitres à exposer la mise en œuvre de méthodes numériques modernes et performantes au cas industriel du générateur de vapeur. L'ensemble de ces travaux a fait l'objet de diverses publications ou communications écrites dans des conférences (*proceedings*) que le lecteur trouvera en référence (p. 93). Par ailleurs, au fil du texte, les références relatives aux travaux exposés sont rappelées dans un encart au début de la section méthodologique de chaque chapitre.

# DÉCOMPOSITION SPATIALE DE DOMAINE

1

## SOMMAIRE

1.1	CONTEXTE . . . . .	11
1.1.1	Enjeux et motivations . . . . .	11
1.1.2	Objectifs et approche générale . . . . .	11
1.2	MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE . . . . .	12
1.2.1	Introduction . . . . .	12
1.2.2	Pistes de recherche et cadre logiciel . . . . .	13
1.2.3	Algorithmes de Dirichlet-Neumann et de Dirichlet-Neumann adapté . . . . .	14
1.3	APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR . . . . .	16
1.3.1	La décomposition de domaine comme préconditionneur . . . . .	18
1.3.2	Recouvrement et stabilité . . . . .	19
1.3.3	Performances en parallèle . . . . .	22
	CONCLUSION . . . . .	27

ON s'intéresse ici aux méthodes de décomposition de domaine en espace – méthodes proprement dites de décomposition de domaine. Le principe directeur est la fameuse maxime *diviser pour régner*, c'est à dire, considérer de façon itérative des petites quantités de données afin de résoudre facilement des problèmes locaux en espace qui concourent à résoudre un problème global. Ces méthodes peuvent être appliquées de façon globale ou locale (raffinement local multi-niveaux via des patches par exemple, cf. Chapitre 3, Section 3.2.4).

On présente tout d'abord un panorama restreint des diverses approches existantes. Puis, on se focalise sur les méthodes itératives que j'ai développées et mises en oeuvre dans le contexte de l'étude des générateurs de vapeur afin d'augmenter les capacités de simulations.



## 1.1 CONTEXTE

La simulation des composants nucléaires permet de calculer les performances globales des cœurs et générateurs de vapeur, mais également d’optimiser le design local de certains constituants – plaque de distribution, formes des passages pour le fluide des plaques entretoises, ailettes des grilles de maintien des crayons, ... – en vue d’améliorer les performances ; ainsi que d’évaluer l’impact sur la sûreté de défauts éventuels – corrosion dans des plaques, déplacement d’une plaque, encrassement, ... Pour cela, on a besoin d’avoir une description spatiale détaillée, au moins localement.

### 1.1.1 Enjeux et motivations

Comme décrit au Chapitre d’introduction, la simulation industrielle des composants nucléaires utilise des quantités moyennées car une simulation directe diphasique du fluide secondaire dans le réseau de tubes primaires de l’évaporateur est hors de portée des moyens informatiques actuels. Même en décrivant le composant par un milieu poreux équivalent (“soupe” de fluide diphasique secondaire, de tubes métalliques et de fluide monophasique primaire), il faudrait une dizaine de millions d’éléments pour paver le domaine de calcul d’un GV industriel d’éléments dont le volume correspond à celui de la cellule d’homogénéisation. Ce grand nombre d’inconnues conduit à une importante place mémoire nécessaire à la résolution directe du système linéaire relatif à la projection – calcul de la pression ou d’un correcteur de pression, cf. Eqs A.4-A.6. De fait, dans le cas d’un code de calcul non parallèle, comme ceux utilisés pour le cœur et le GV au CEA, les machines actuelles dotées d’une grande quantité de mémoire permettent la réalisation de calculs de plusieurs centaines de milliers à un ou deux millions d’éléments au maximum. Par ailleurs, plus le nombre d’inconnues augmente et plus le nombre d’itérations des solveurs itératifs augmente pour résoudre les systèmes linéaires (bilan d’enthalpie ou de quantité de mouvement)<sup>1</sup>.

### 1.1.2 Objectifs et approche générale

Pour répondre aux besoins liés à des simulations mettant en œuvre un grand nombre de degrés de liberté ou nécessitant une précision spatiale accrue localement, les méthodes de décompositions de domaines sont un outil de choix.

Par décomposition de domaines, on entend la décomposition de l’espace vectoriel  $V$ , dans lequel on cherche la solution d’une Équation aux Dérivées Partielles, EDP, en la somme d’espaces vectoriels  $\{V_i\}$  de cardinal plus petit dans lesquels une solution (partielle) est plus facile à trouver ; la composition de l’ensemble des solutions partielles devant donner la solution de l’EDP initiale. Cela recouvre aussi bien la décomposition spatiale du domaine de calcul  $\Omega$  en sous-domaines  $\{\Omega_i\}$  se recouvrant ou non – ce qu’on désigne usuellement par décomposition de domaine – que la décomposition fréquentielle (en échelle) du domaine de calcul. Dans la première approche, les espaces vectoriels  $V_i$  sont associés aux sous-domaines  $\Omega_i$ . Ils correspondent à des sous-ensembles d’éléments de  $V$  – par exemple, en fonction de la localisation des supports des fonctions de base dans  $\Omega_i$ . Dans la seconde approche, les éléments de  $V$  sont combinés et regroupés de façon à réaliser une décomposition en échelle (base hiérarchique). Pour chaque échelle, on pourra alors résoudre ou lisser l’EDP en tirant partie des avantages liés à l’échelle considérée – par exemple : réduction du nombre de degrés de liberté, ddl, efficacité d’une méthode itérative pour les petites fluctuations spatiales à une échelle donnée, ... On remplacera donc la résolution de l’EDP originale sur  $\Omega$  par la réalisation d’un algorithme, souvent itératif, impliquant des sous-problèmes locaux couplés. La mise en œuvre peut être

<sup>1</sup>Pour une méthode itérative fonctionnant en lisseur, c’est la précision obtenue après quelques itérations du lisseur qui se dégrade.

faite de façon séquentielle – i.e. en résolvant les sous-problèmes l'un après l'autre – ou de façon parallèle – i.e. les sous-problèmes sont résolus en même temps.

## 1.2 MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE

[•] *Décomposition de domaine (DDM) de type Schwarz, en parallèle, avec recouvrement ou non de sous-domaines et avec des maillages conformes ou non-conformes.*

Avec M. Grandotto du CEA Cadarache  
 Interactions : Ph. Angot d'Aix-Marseille Université,  
 Publication associée : Belliard et Grandotto (2002)  
 Conférences associées : Belliard et Grandotto (1998), Belliard et Grandotto (2000) et Belliard (2003)

### 1.2.1 Introduction

Ce type de méthodes, introduites par H. Schwarz au 19<sup>ème</sup> siècle (Schwarz 1870) a connu un regain d'intérêt via les travaux de Lions (1990) et le développement des machines de calcul parallèle. D'une façon très générale – une présentation plus détaillée est fournie en Annexe A.2 –, la décomposition de domaine consiste à résoudre une EDP (ou un système d'EDP) sur le domaine  $\Omega$  :

$$\mathcal{P}_p(u) = b \text{ sur } \Omega \text{ avec CL sur } \partial\Omega \quad (1.1)$$

avec  $\mathcal{P}$  un opérateur donné, via un algorithme itératif consistant à décomposer  $\Omega$  en  $N_s$  sous-domaines  $\Omega_i$  se recouvrant ou non, cf. Fig. 1.1. A chaque itération  $k \in \mathbb{N}$  et successivement pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$ ,  $i = 1 \dots N_s$ , on met à jour des Conditions aux Limites, CL, données par les autres sous-domaines  $\Omega_j$ ,  $j \neq i$  et on résout (par exemple pour  $N_s = 2$ ) :

$$\mathcal{P}_1(u_1^k) = b_1 \text{ sur } \Omega_1 \quad (1.2)$$

$$\text{avec CL du pb initial sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \quad (1.3)$$

$$\text{et } CL_1(u_1^k, u_2^{k-1}) \text{ on } \Gamma_1 \cap \Omega_2, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{P}_2(u_2^k) = b_2 \text{ sur } \Omega_2 \quad (1.5)$$

$$\text{avec CL du pb initial sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \quad (1.6)$$

$$\text{et } CL_2(u_2^k, u_1^*) \text{ on } \Gamma_2 \cap \Omega_1 \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1 \dots N_s$ , est une restriction de  $\mathcal{P}$  à  $\Omega_i$ ,  $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$  et  $CL_i$  est une condition limite appropriée faisant intervenir les  $u_i$ ,  $u_j$ ,  $j \neq i$  et, éventuellement, leurs dérivées spatiales.

Cet algorithme peut être réalisé en séquentiel  $u_1^* = u_1^k$  ou en parallèle  $u_1^* = u_1^{k-1}$ . Le recouvrement des sous-domaines est un facteur clef, ainsi que le nombre de sous-domaines. Avec des CL de type Dirichlet et des sous-domaines se recouvrant – méthode de Schwarz classique – la convergence de l'algorithme se détériore lorsque le nombre de sous-domaines croît ou lorsque le recouvrement entre sous-domaines n'est pas suffisant. Il existe des techniques d'accélération de la convergence et de correction de la dépendance en fonction du nombre de sous-domaines. En particulier, via l'utilisation d'une grille grossière, cf. Chapitre 2.

Les méthodes de Schwarz généralisées s'appliquent à des décompositions de domaine sans recouvrement et peuvent se voir comme un préconditionnement particulier du problème à l'interface – Dirichlet-Neumann, Neumann-Neumann ou Robin-Robin –, cf. Annexe A.2.

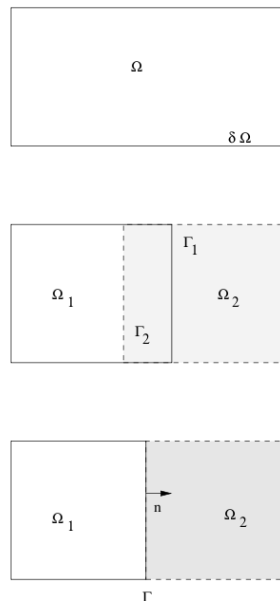


FIG. 1.1 – Décomposition du domaine  $\Omega$  (haut) en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec recouvrement (milieu ;  $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ ) ou sans recouvrement (bas ;  $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ ).

### 1.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel

Les motivations sont celles citées plus haut : réduire les temps de calcul par la mise en œuvre du parallélisme et accroître la mémoire distribuée disponible pour les simulations. C'est également un moyen de préconditionner l'algorithme de résolution des équations de bilan. L'algorithme de Schwarz et les méthodes d'itérations par sous-domaine, cf. Annexe A.2, reposent sur une procédure itérative de partage des conditions aux limites entre les sous-domaines et de résolution de problèmes locaux, définis sur chacun d'eux. Ceci fournit un cadre qui est cohérent avec une réalisation informatique de couplage de codes. En effet, il est souvent difficile, voire impossible, de modifier les sources développées par des équipes différentes. Ici, on bénéficie du fait que les méthodes d'itérations par sous-domaine ne nécessitent, en vue de la résolution du problème à l'interface Eq. (A.24), que de disposer du résultat de l'action du complément de Schur local  $S_i$  sur  $u_{\Gamma_i}$  (problème local, cf. Annexe A.2). C'est donc cette approche qui a été retenue et qui est présentée ci-dessous.

**Remarque 1.1** *Toujours dans le but de réduire le temps de restitution des calculs, la méthode additive de Schwarz a été mise en œuvre avec succès pour la résolution d'une équation linéaire de type elliptique typique de celle de Généri – étape de projection pour le calcul de la pression. Bien qu'on ne développe pas ici cet aspect<sup>2</sup>, nous pouvons dire que l'utilisation de la méthode additive de Schwarz en tant que préconditionneur d'une méthode de gradient conjugué – réalisation d'un ILU(o) local à chaque sous-domaine –, conduit à réduire le temps CPU vis-à-vis d'un simple gradient conjugué préconditionné par un ILU(o) global ; l'efficacité parallèle étant de 60% pour une dizaine de processus.*

De fait, j'ai développé un environnement logiciel basé sur le concept de tâches esclaves dirigées par une tâche maître. La bibliothèque *Parallel Virtual Machine*, PVM, cf. Geist et al. (1996), fournit le média de communication. La tâche maître est le logiciel CEA Isas (Gulden et al. 1997). Les tâches esclaves sont des versions instrumentées du logiciel Généri : envoyer un message, recevoir un message, faire un certain nombre de pas de temps, ... Ce cadre permet de mettre en œuvre aussi bien des méthodes de décomposition de domaine en espace qu'en

<sup>2</sup>Je ne présente ici que mes travaux concernant la résolution par un algorithme de Schwarz additif d'un système d'équations non linéaires.

fréquence (multi-grilles), cf. Section 2.2.1, ou encore des algorithmes de raffinement local tel que l'algorithme LDC, cf. Section 3.2.3.

Le calcul couplé commence par une étape d'initialisation et d'enregistrement (voire d'harmonisation) des données de calcul des tâches Généri – tâche séquentielle ou parallèle, critères de régime stationnaire, ... Ensuite, chaque tâche Généri publie l'existence d'un certain nombre de régions de son sous-domaine de calcul qui sont couplées à d'autres tâches Généri et ayant donc besoin de données externes. La définition d'une région couplée regroupe une géométrie (frontière ou volume), un type de condition limite (Dirichlet, Neumann, ADN, FAS, ...) et une méthode de traitement des données externes reçues (interpolation, restriction ...). La tâche maître synthétise ces besoins et informe chaque tâche Généri des données qu'elle aura elle-même à fournir.

Ensuite, à chaque itération de couplage – *i.e.* tous les  $n_{cp}$  pas de temps de chaque tâche esclave,  $n_{cp} \in \mathbb{N}^{*+}$  – la tâche maître reçoit les données fournies par les tâches esclaves et les transmet à leurs destinataires. Une relaxation peut éventuellement être mise en place pour aider à la convergence de l'algorithme de couplage.

A noter qu'à partir de ce processus parallèle par essence, il est possible de construire un algorithme mixte séquentiel/parallèle si on accepte l'existence d'un léger surcoût en communication vis-à-vis du strict nécessaire – par exemple, message de type "sans objet" envoyé à une tâche qui se met en attente du résultat d'un calcul sur un autre sous-domaine.

Le calcul couplé s'arrête lorsque chaque tâche Généri a vérifié le critère (A.3) portant sur la variation temporelle relative par unité de temps pour chaque variable ( $G$ ,  $H$ ,  $P$  ou  $T_p$ ) et que les variations relatives temporelles des quantités aux interfaces  $\zeta_{\Gamma_i}$  (variables ou flux) sont inférieures au paramètre  $\epsilon_{st}$  de ce même critère. La norme  $L^2$  discrète de la variation relative temporelle de la quantité  $\zeta$  est définie par :

$$|\zeta^{*+1} - \zeta^*|_{L^2} / |\zeta^*|_{L^2} \quad (1.8)$$

avec  $*$  =  $n$  le numéro de l'itération en temps pour une variable ( $G$ ,  $H$ ,  $P$  ou  $T_p$ ) ou  $*$  =  $k$  le numéro de l'itération de couplage pour une quantité sur l'interface  $\Gamma_i$ .

Enfin, les notions liées au parallélisme – *speed-up*, efficacité parallèle, *scalabilité* et granularité de découpage – sont définies en Annexe A.3.

### 1.2.3 Algorithmes de Dirichlet-Neumann et de Dirichlet-Neumann adapté

Pour la mise en œuvre des idées développées dans la Section 1.2.1 au cadre spécifique de la simulation des composants nucléaires – et plus particulièrement des générateurs de vapeur –, j'ai défini un algorithme original utilisant la méthode Dirichlet-Neumann et la méthode Dirichlet-Neumann adaptée – *Adaptive Dirichlet-Neumann*, ADN, Carlenzoli et Quarteroni (1995), Gastaldi et Quarteroni (1998) – suivant la nature (elliptique/hyperbolique) de chaque équation de bilan du système d'équations (1)-(4) pour les fluides du circuit primaire et secondaire (Belliard et Grandotto 2002). Dans une approche adaptée, les conditions aux limites, Dirichlet ou Neumann, localement appliquées à l'interface entre les sous-domaines dépendent du sens de l'écoulement du fluide, entrant ou sortant du sous-domaine, en chaque point de l'interface.

#### Conditions d'interface

Les équations de bilan peuvent se ranger dans deux groupes. D'un côté, on a le bilan de quantité de mouvement et celui de masse du fluide secondaire qui forment un système fortement intriqué via la méthode de projection, cf. Eqs. (A.4) et (A.6). De part l'aspect elliptique de

l'équation de projection (A.6), la méthode Dirichlet-Neumann est un candidat possible pour un algorithme de décomposition de domaine concernant ce groupe d'équations. Il en est de même pour le bilan d'énergie du fluide primaire dont les vitesses 1D sont figées.

De l'autre côté, on trouve le bilan d'enthalpie du fluide secondaire qui a un caractère hyperbolique plus affirmé. Pour ce bilan, l'approche Dirichlet-Neumann adaptée s'impose. Dans le cas d'un tourbillon à cheval sur une interface de couplage, il est important de bien traiter la condition limite locale sous peine d'injecter dans le calcul des enthalpies aberrantes. A noter que des conditions de couplage de type Robin-Robin n'ont pas été explorées dans ce travail, mais présentent à priori un fort potentiel pour nos applications.

D'une façon générale, on désire la continuité des variables et de leurs dérivées – par abus de langage, car il s'agit de *contraintes* mécaniques ou thermiques – aux interfaces  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  entre les sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ ,  $i, j = 1 \dots N_s$   $j \neq i$  tels que  $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{\Gamma_i} = \mathbf{G}_{\Gamma_j}, \\ \bar{\sigma}_{\Gamma_i} \mathbf{n}_{\Gamma_i} = -\bar{\sigma}_{\Gamma_j} \mathbf{n}_{\Gamma_j}, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$(1.10)$$

avec  $\mathbf{n}_{\Gamma_i} = -\mathbf{n}_{\Gamma_j}$  la normale externe à l'interface  $\Gamma_i$  et

$$\bar{\sigma} = -P\bar{I} + \mu_T(\nabla \mathbf{V} + \nabla^T \mathbf{V}), \quad (1.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\Gamma_i} = H_{\Gamma_j}, \\ \chi_{T\Gamma_i} \nabla H_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_i} = -\chi_{T\Gamma_j} \nabla H_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j}, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

ainsi que

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{p\Gamma_i} = T_{p\Gamma_j}, \\ \chi_{Tp} \nabla T_{p\Gamma_i} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_i} = -\chi_{Tp} \nabla T_{p\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j}. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$(1.15)$$

On remarquera l'utilisation du flux de masse  $\mathbf{G}$  au lieu de la vitesse dans Eq. (1.9). Cela est guidé par la conservation de la masse ( $\text{div} \mathbf{G} = 0$ ).

Avec la discrétisation en éléments finis choisie, les équations Eqs (1.9) et (1.12) de continuité des variables mettent en œuvre des quantités nodales. Ce serait également le cas pour la température primaire si on réalisait une décomposition de domaine des lignes qui servent de support à la discrétisation P1 de celle-ci. Mais la technologie utilisée pour générer ces lignes primaires conduit à une dépendance vis-à-vis du sous-domaine<sup>3</sup> – le nombre de lignes varie d'un sous-domaine à l'autre –, ce qui rend difficile une telle décomposition. De fait, on utilise la projection de la température primaire nodale 1D sur les éléments Q0 du secondaire 3D, cf. Remarque A.1 de Annexe A.1 concernant l'Eq. (5). La relation (1.14) est donc, en terme de température primaire, constante par élément.

Dans le cas d'une décomposition sans recouvrement d'un maillage conforme du domaine global, le passage des variables ou de leurs dérivées entre les sous-domaines peut se faire par des affectations directes. Par contre, dans le cas de maillages globalement non conformes, cf. Fig. 1.2, la continuité est à rechercher à travers un opérateur de projection tel que l'interpolation linéaire. Ce dernier cas correspond à des sous-domaines maillés de façon indépendante,

<sup>3</sup>Pour nos applications, la géométrie d'un sous-domaine correspond à une tranche de cylindre, cf. Section 1.3.



ce qui permet par exemple de faire un raffinement local du maillage dans une zone d'intérêt. Dans mon domaine, ces zones correspondent à l'entrée du générateur et la plaque de séparation de débit, au *chignon* formé par le haut des tubes primaires et les barres anti-vibratoires qui les soutiennent.

Bien que les méthodes utilisées correspondent à des techniques de décomposition sans recouvrement des sous-domaines, j'ai introduit la possibilité d'avoir un recouvrement partiel dans le but d'accroître la stabilité de l'algorithme. Dans ce cas aussi, il faut alors avoir recours à des opérateurs de projection entre sous-domaines si les maillages ne sont pas globalement conformes, cf. Fig. 1.5.

## ADN

Soit la variable  $\zeta$  – vitesse massique, enthalpie ou température primaire – en chaque point  $\mathbf{x}_\Gamma$  de l'interface  $\Gamma$ . L'algorithme classique de Dirichlet-Neumann considère que tous les points de  $\Gamma_i$  ont le même type de condition limite et de même pour  $\Gamma_j$  – ce qui suppose que l'écoulement ne présente pas de vortex à l'interface. Ici l'approche retenue consiste à ventiler les relations de continuité de la variable et de sa dérivée sur les frontières  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  des sous-domaines qui se partagent  $\mathbf{x}_\Gamma$  :

$$\begin{cases} \zeta(\mathbf{x}_{\Gamma_i})^k = \zeta(\mathbf{x}_{\Gamma_j})^{k-1}, & (1.16) \\ \bar{\sigma}(\zeta(\mathbf{x}_{\Gamma_j}))^k \mathbf{n}(\mathbf{x}_{\Gamma_j}) = -\bar{\sigma}(\zeta(\mathbf{x}_{\Gamma_i}))^{k*} \mathbf{n}(\mathbf{x}_{\Gamma_i}), & (1.17) \end{cases}$$

où  $k$  est l'itération de couplage et  $\bar{\sigma}(\zeta)$  est une *contrainte* définie par Eq. (1.10), (1.13) ou (1.15). La quantité  $k^*$  est égale à  $k$  ou à  $k - 1$  suivant que l'algorithme est respectivement séquentiel ou parallèle. Le point  $\mathbf{x}_{\Gamma_i}$  est donc une condition limite de type Dirichlet pour  $\Gamma_i$ , donnée par  $\Gamma_j$ . De même, le point  $\mathbf{x}_{\Gamma_j}$  est une condition limite de type Neumann pour  $\Gamma_j$ , donnée par  $\Gamma_i$ . Cette mise en œuvre est typique de l'algorithme Dirichlet-Neumann adapté, ADN. La ventilation des relations de continuité est locale en fonction de la vitesse : Neumann pour le sous-domaine en amont ( $\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\Gamma_j}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_{\Gamma_j}) > 0$ ; sortie) et Dirichlet pour le sous-domaine en aval ( $\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\Gamma_i}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_{\Gamma_i}) < 0$ ; entrée).

La stabilité de la méthode Dirichlet-Neumann adaptée peut être un point crucial pour l'algorithme décrit ici, comme cela est démontré dans Gastaldi et Quarteroni (1998). Suivant ces auteurs, nous introduisons un processus de relaxation dans l'affectation des conditions limites :

$$\zeta_{\Gamma_i}^k = (1 - r_\zeta) \zeta_{\Gamma_i}^{k-1} + r_\zeta \zeta_{\Gamma_j}^k \quad (1.18)$$

où  $\zeta_{\Gamma_i}^k \equiv \zeta(\mathbf{x}_{\Gamma_i})^k$ ,  $k$  est l'itération de couplage et  $0 < r_\zeta$  le coefficient de relaxation associé à la variable  $\zeta$ . Dans les travaux de Gastaldi et Quarteroni, cette relaxation porte sur la condition limite de Dirichlet en ADN. Je l'ai étendue également au cas où  $\zeta$  est une *contrainte*. C'est d'ailleurs proche de ce que font les auteurs pour la méthode Robin-Neumann adapté (*Adaptive Robin-Neumann*, ARN) sur une quantité formée par la *contrainte* et la variable (flux de convection plus diffusion).

## 1.3 APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR

Cette technique a été mise en œuvre avec succès dans le cadre général de la simulation des générateurs de vapeur et, en particulier, pour celle de la maquette Clotaire du CEA (Campan et Bouchter 1988). L'évaporateur de cette maquette de GV forme un demi cylindre

de 0,62 m de diamètre et 9,16 m de hauteur. L'intérieur est rempli d'un faisceau de tubes en forme de U de 7,2 m de hauteur, dans lesquels circule le fluide primaire (débit massique de  $60,05 \text{ kg.s}^{-1}$  ; température en entrée de 361,8 K). Une plaque de répartition d'écoulement, neuf plaques support de tubes et une barre anti-vibration sont respectivement situées à la base, dans la partie droite et dans le chignon du faisceau de tubes. Le diamètre hydraulique dans le faisceau est de  $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  environ. Les débits massiques de fluide secondaire en Fréon R114 sont de  $37,55 \text{ kg.s}^{-1}$  en entrée de la branche chaude et de  $28,3 \text{ kg.s}^{-1}$  en branche froide. Les enthalpies correspondantes sont respectivement de 119,3 et 118,5  $\text{kJ.kg}^{-1}$ . La pression dans le dôme est de 0,88 MPa. Le flux de masse moyen dans l'évaporateur est de l'ordre de  $550 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . L'application informatique s'inscrit dans le cadre général décrit à la Section 1.2.2.

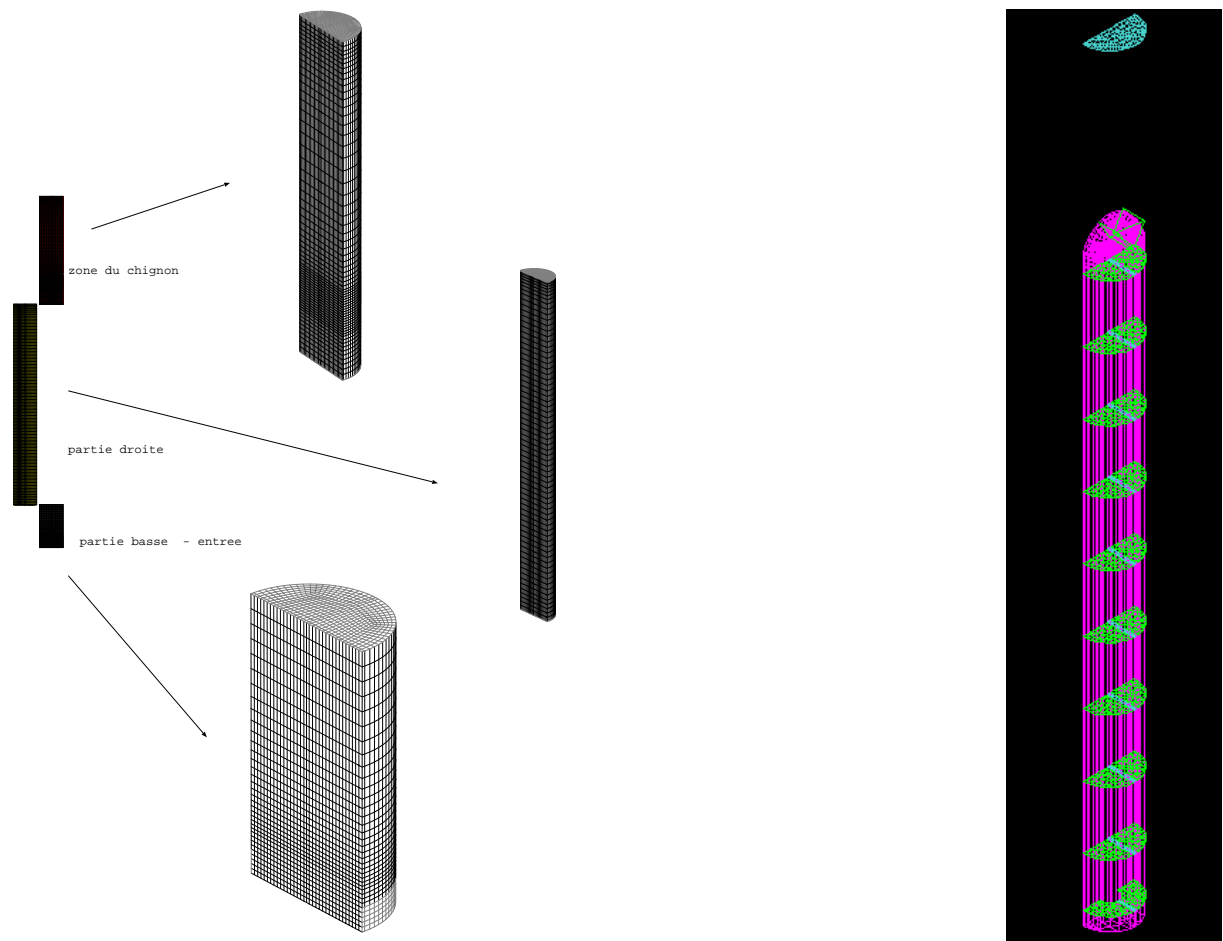


FIG. 1.2 – Simulation de la Maquette Clotaire. Décomposition de domaine en trois sous-domaines sans recouvrement (à gauche) et maillage des internes technologiques (à droite). Le maillage de chaque sous-domaine est réalisé au mieux des possibilités (la partie basse et la partie supérieure ont des tailles de maille comparables à la distance inter-tube), ce qui conduit à un maillage globalement non conforme de 70 000 éléments. Ce calcul en décomposition de domaine nécessite environ 500 Mo répartis sur 3 CPU (un CPU -Central Processing Unit- par sous-domaine).

Le découpage du domaine de calcul en sous-domaines est réalisé par des coupes orthogonales à l'axe verticale de la géométrie du générateur de vapeur – direction principale de l'écoulement globalement ascendant. Ceci est naturel au vue de l'allongement important du domaine de calcul (en gros 1 sur 10). La Fig. 1.2 illustre une décomposition en  $N_s = 3$  sous-domaines sans recouvrement. Une valeur typique du coefficient de relaxation est  $r_\zeta = 0,4$  et les conditions d'interfaces sont généralement appliquées tous les  $n_{cp} = 10$  à 20 pas de temps. Ici, je ne présente que certains résultats saillants concernant le préconditionnement, la stabilité liée au

recouvrement et les performances du parallélisme. En Annexe A.4, on trouvera des éléments d'appréciation en ce qui concerne la précision des calculs GV en décomposition de domaine. Pour plus de détails, on peut se reporter à la publication Belliard et Grandotto (2002) et aux communications Belliard et Grandotto (1998; 2000) et Belliard (2003).

### 1.3.1 La décomposition de domaine comme préconditionneur

Au delà de la réduction des coûts de calcul grâce au parallélisme, la décomposition de domaine permet un préconditionnement naturel par bloc –  $\equiv$  Jacobi, cf. Angot (1994) – de l'algorithme de résolution des équations de bilan pour le calcul du régime stationnaire. Au lieu de résoudre un système d'équations non linéaires par des itérations de Picard sur un opérateur  $\mathcal{P}$ , cf. Eq. (A.1), portant sur l'ensemble des inconnues du domaine complet, on en résout plusieurs portant sur des blocs d'inconnues (les sous-domaines). On optimise au mieux ces résolutions locales  $\mathcal{P}_i^{-1}$ ,  $i = 1 \dots N_s$ . Pour une variable  $\zeta$ , le processus global des itérations de Picard, formellement décrit par :

$$\zeta^{n+1} = \mathcal{P}^{-1}(\zeta^n) b \quad (1.19)$$

où  $b$  est un second membre, est remplacé par un processus préconditionné :

$$\zeta^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_s} R_i^T \mathcal{P}_i^{-1} (R_i \zeta^n) R_i b \quad (1.20)$$

avec  $R_i$  opérateur de restriction au sous-domaine  $i$ . D'une part, la convergence des méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires est d'autant plus rapide que le nombre de degrés de liberté est réduit. Et, de fait, ce nombre est plus petit dans chaque sous-domaine que dans le domaine complet. D'autre part, lors de la recherche d'un régime stationnaire, il est possible d'utiliser un pas de temps local à chaque sous-domaine<sup>4</sup>, sans être globalement contraint – en cas de condition CFL – par la dimension de la plus petite maille du domaine de calcul. Cela permet d'accélérer la transmission de l'information dans l'ensemble du domaine de calcul.

Une illustration de cet aspect est décrit dans la publication Belliard et Grandotto (2002) pour le cas de la simulation en  $N_s = 3$  sous-domaines de la Fig. 1.2. Le pas de temps est local à chaque sous-domaine. Le sous-domaine supérieur contenant le chignon possède le plus petit élément de la discrétisation spatiale et, via une contrainte CFL donnée, le plus petit pas de temps des trois sous-domaines, cf. Table 1.1. Le critère de régime stationnaire a été vérifié dans chaque sous-domaine à l'itération en temps numéro 681. Par comparaison, la simulation en un seul domaine, noté  $fd$ , également discrétisé au mieux des possibilités et utilisant les mêmes modèles physiques et paramètres numériques, nécessite 1 660 itérations en temps<sup>5</sup>. Cette convergence plus rapide vers l'état stationnaire est illustrée sur la partie gauche de la Fig. 1.3 décrivant l'historique de la variation relative temporelle de  $\mathbf{G}$  – variable convergeant le plus lentement. La partie droite de la Fig. 1.3 est relative à la variation temporelle des quantités  $\mathbf{G}_{\Gamma_i}$  (Dirichlet) et  $\bar{\sigma}_{\Gamma_i} \mathbf{n}_{\Gamma_i}$  (Neumann). De part une transmission rapide de l'information, cf. Table 1.1 ( $\diamond$ ), les frontières couplées de la partie haute ont rapidement des valeurs réalistes en condition limite. L'écart entre valeurs Dirichlet aux frontières  $\Gamma_i$  est réduite d'environ deux décades en 681 itérations en temps. Enfin, précisons qu'il n'y a pas de perte significative de précision pour ce calcul en décomposition de domaine. Les écarts relatifs, par rapport au calcul séquentiel du domaine complet, sont généralement de l'ordre du pourcent, cf Annexe A.4.

En conclusion, la décomposition de domaine vue comme préconditionneur – solveur non

<sup>4</sup>Dans le cas du calcul d'un régime stationnaire, si on n'accorde pas d'importance au transitoire obtenu, les itérations en temps peuvent être essentiellement vues comme des itérations relaxées de Picard pour résoudre les non linéarités. Cela revient donc à utiliser des coefficients de relaxation propres à chaque sous-domaine.

<sup>5</sup>Le pas de temps est voisin de celui du calcul du chignon seul.

Sous-domaine ou domaine	# itérations pour $ \zeta^{n+1} - \zeta^n _{L2} /  \zeta^n _{L2} \leq \epsilon_{st} \delta t$	CPU (s)	$\delta t \cdot 10^2$ (s)	$\diamond$
Partie haute (chignon)	681	12655	0,7	2,1
Partie droite (centrale)	622	9133	2,1	2,3
Partie basse (entrée)	550	7416	1,5	4,5
Domaine complet ( <i>fd</i> )	1660	64698	0,75	1,1

$\diamond$  Temps final/temps nécessaire au parcourt du sous-domaine ou du domaine par le fluide.

TAB. 1.1 – Illustration de la décomposition de domaine comme préconditionneur. Calcul en décomposition de domaine de la maquette d'un générateur de vapeur (Clotaire) pour le cas d'une décomposition en trois sous-domaines sans recouvrement. Le paramètre  $\epsilon_{st}$  du critère de régime stationnaire, cf. Eq. (A.3), est fixé à  $5 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ . Temps CPU pour une station SUN UltraSparc 2, 200 MHz (incluant les temps CPU liés aux communications).

linéaire parallèle local à chaque sous-domaine – conduit ici à une économie d'environ 60% du nombre d'itérations en temps et de 70% du temps CPU. Sans tenir compte des temps CPU liés aux communications<sup>6</sup>, un pas de temps en décomposition de domaine parallèle est deux fois plus rapide (*speed-up*) que celui du domaine complet en séquentiel ; soit une efficacité parallèle de 0,65 sur trois CPU.

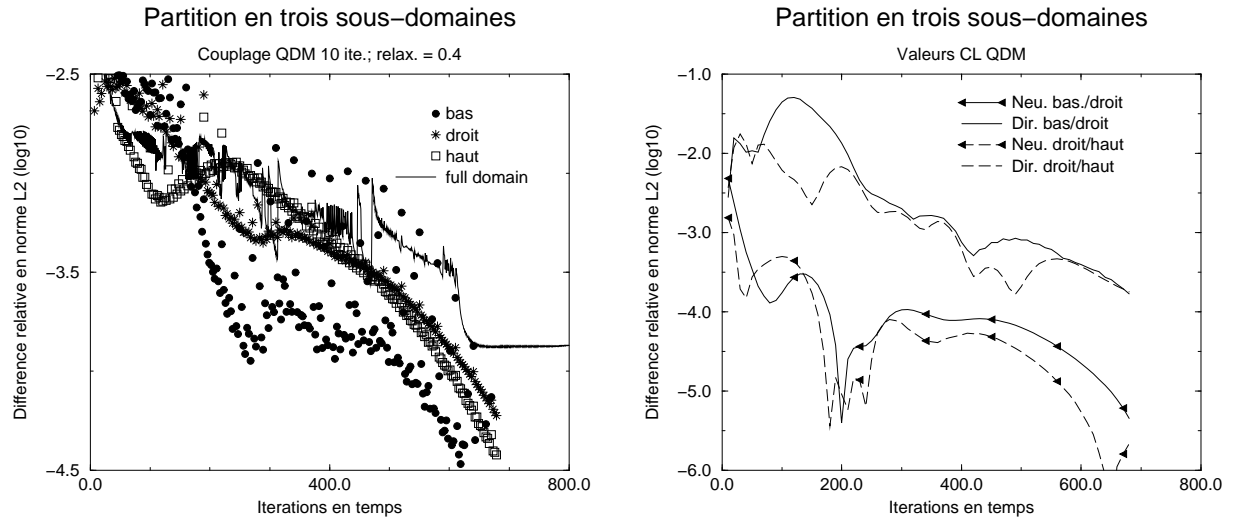


FIG. 1.3 – Historique de la variation relative temporelle de la variable  $\mathbf{G}$  et des valeurs prises en conditions aux limites (flux de masse) pour la partition en trois sous-domaines sans recouvrement (Clotaire).

### 1.3.2 Recouvrement et stabilité

Lors d'une décomposition de domaine sans recouvrement, le choix du coefficient de relaxation  $r_\zeta$  de Eq. (1.18) est crucial. La Fig. 1.4 illustre l'influence de ce coefficient  $r_\zeta \in [0, 1; 0, 7]$  sur la convergence vers un régime stationnaire pour l'enthalpie spécifique du fluide secondaire – partition en  $N_s = 4$  sous-domaines sans recouvrement de la maquette Clotaire. Au delà de  $r_\zeta = 0,3$ , l'algorithme ne converge plus vers un régime permanent. La valeur optimale se situe dans l'intervalle  $[0, 2; 0, 3]$ .

<sup>6</sup>Le surcoût CPU lié aux communications entre les tâches est ici de l'ordre de 20% et augmente lorsque la période de couplage  $n_{cp}$  diminue.

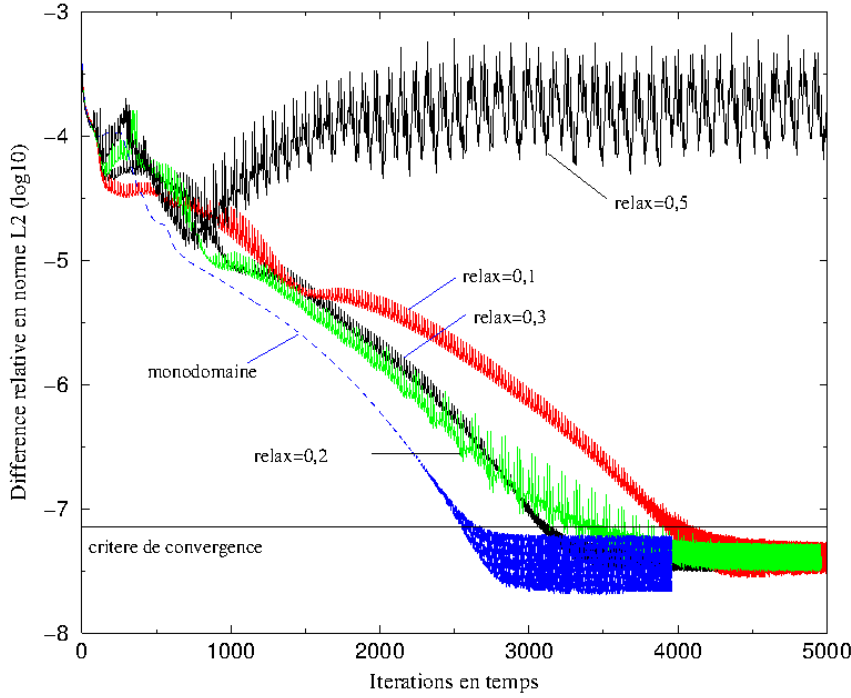


FIG. 1.4 – Décomposition de domaine en  $N_s = 4$  sous-domaines sans recouvrement pour la simulation de la maquette Clotaire (129 536 éléments). Influence de la valeur du coefficient de relaxation  $r_\zeta$  (noté relax) sur l'historique de l'enthalpie spécifique du fluide secondaire. Le critère de convergence indiqué est relatif à l'obtention d'un régime stationnaire. La référence est le calcul sans décomposition de domaine.

Plus généralement, notre expérience est que, dans le cas d'une décomposition de domaine sans recouvrement, il est parfois nécessaire d'ajuster les paramètres numériques du calcul. Ceux-ci concernent la relaxation aux interfaces de couplage  $r_\zeta$ , la période de couplage  $n_{cp}$ , la relaxation de la pression au cours du temps ( $r_p P^{n+1} + (1 - r_p) P^n$ , où  $n$  est le numéro du pas de temps courant), ... Ce manque de stabilité pour la décomposition sans recouvrement est d'autant plus grand que le nombre de sous-domaines augmente.

Nous considérons ici une extension de l'algorithme sans recouvrement décrit ci-dessus. Tout en conservant ses caractéristiques, j'introduis de manière heuristique un recouvrement partiel des sous-domaines, comme illustré sur la Fig. 1.5. En éloignant ainsi le lieu d'application de la condition d'interface de type Dirichlet de celle de type Neumann, la stabilité de l'algorithme s'en trouve accru et la relaxation aux interfaces ( $r_\zeta = 1$ ) ou sur la pression peut même être évitée. Il n'est pas proposé ici de démonstration de cet accroissement de la stabilité algorithmique. Elle est expérimentalement constatée dans mes simulations comme illustré sur la Fig. 1.6. Dans cet exemple, où le domaine de calcul est décomposé en seize sous-domaines (Fig. 1.6, à gauche), un recouvrement de trois couches d'éléments permet de stabiliser l'algorithme qui sans cela ne converge pas vers le régime stationnaire. Le prix à payer est un surcoût en temps CPU – qui dépend du nombre de couches d'éléments supplémentaires vis-à-vis du nombre de couches d'éléments dans le sous-domaine. Par ailleurs, comme on peut en juger sur la Fig. 1.5, les écarts des approximations entre sous-domaines sont faibles.

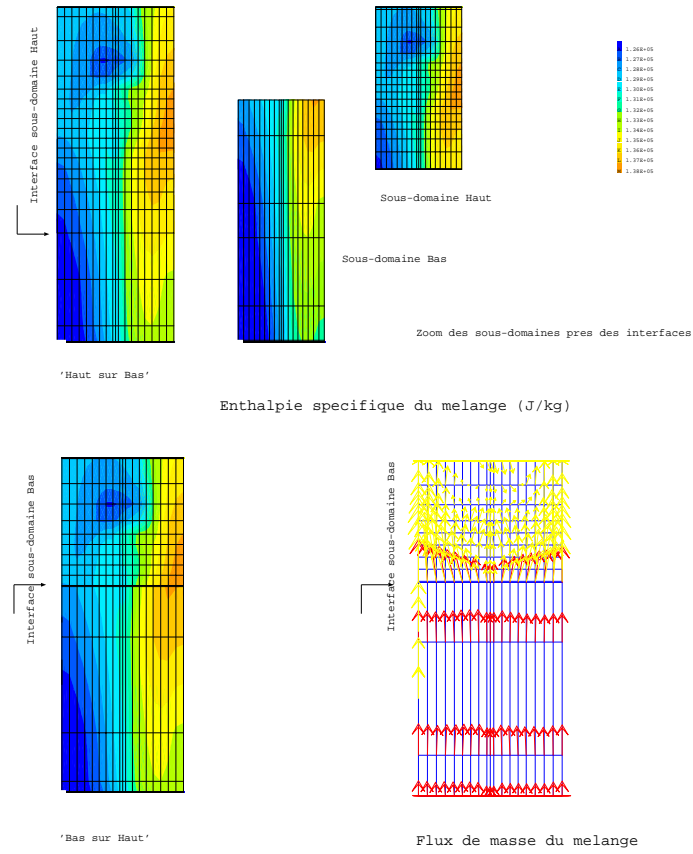


FIG. 1.5 – Décomposition de domaine en  $N_s = 2$  sous-domaines avec recouvrement dans la zone du chignon pour la simulation de la maquette Clotaire. En haut : zoom du champ d'enthalpie spécifique du fluide secondaire. Éclaté des deux sous-domaines (droite) et superposition (gauche; le sous-domaine Haut recouvre le sous-domaine Bas). En bas : enthalpie spécifique et flux de masse (le sous-domaine Bas recouvre le sous-domaine Haut).

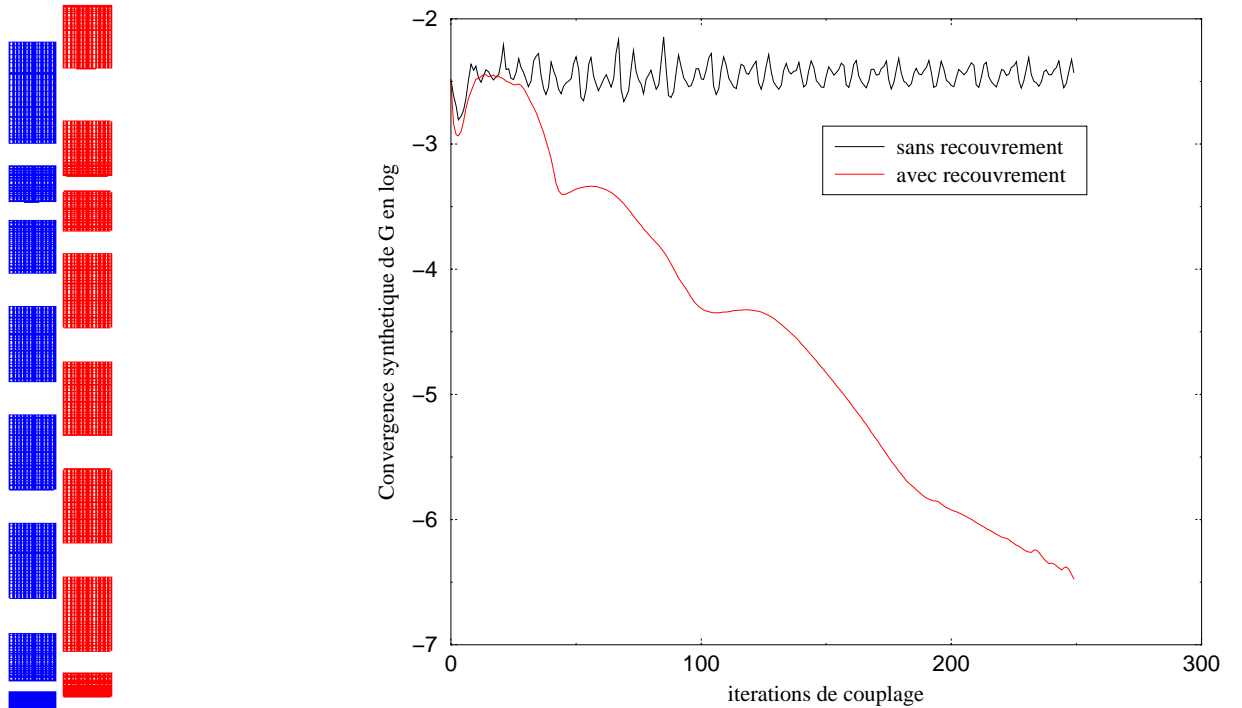


FIG. 1.6 – Décomposition de domaine en  $N_s = 16$  sous-domaines avec recouvrement pour la simulation de la maquette Clotaire ( $n_{cp} = 20$ ). A gauche : éclaté du maillage 3D des sous-domaines (coupe verticale). A droite : historique de la variation relative temporelle de la variable  $G$  en fonction de l'itération de couplage  $k$ .

### 1.3.3 Performances en parallèle

Même sans accélérer localement la convergence de certains sous-domaines, cf. Section 1.3.1, les performances obtenues par notre algorithme dans un contexte de simulation industrielle des générateurs de vapeurs sont très encourageantes. De fait, l'utilisation d'une trentaine de CPU en parallèle a permis de faire croître la taille des simulations d'un facteur 20 environ et ouvert la porte à des simulations comportant plus d'un million d'éléments, cf. Figs 1.7 and 1.8, ce qui était impensable avec un logiciel séquentiel. Dans cette simulation, les éléments forment des cubes d'un centimètre de côté en moyenne<sup>7</sup>.

La Table 1.2 reprend des résultats typiques en ce qui concerne la *scalabilité* faible de l'algorithme. Partant d'un sous-domaine correspondant à 1/8ème de Clotaire – issu d'une partition en  $N_s = 8$  sous-domaines sans recouvrement –, on a réalisé le calcul de  $n = 2 \dots 6$  sous-domaines sur  $n$  CPU<sup>8</sup>. A chaque fois, le nombre maximal de pas de temps est fixe et  $\delta t$  est constant. La *scalabilité* décroît faiblement et se stabilise autour de 0,85 pour [4 – 6] sous-domaines. Cette diminution limitée des performances est à relier à la nature 1D du découpage. Pour un sous-domaine courant, le volume de données à échanger reste identique quelque soit le nombre de sous-domaines : il ne communique qu'avec les sous-domaines voisins au dessus et au dessous.

$n$	Scalabilité faible $SC_p(n, ndof)$	Nb. moyen de frontières/ sous-domaine
1 sous-domaine	1.000	0
2	0,918	2,00
3	0,884	2,66
4	0,851	3,00
5	0,847	3,20
6	0,861	3,33
7	-	3,43

TAB. 1.2 – Scalabilité faible parallèle pour l'algorithme de décomposition de domaine implémenté dans le code Génépi pour  $n = 2 \dots 6$  sous-domaines sur  $n$  CPU. Chaque sous-domaine contient  $ndof = 16\,192$  éléments.

De même, la Table 1.3 illustre les performances en termes de *speed-up* ou de *scalabilité* forte et d'efficacité parallèle de l'algorithme implémenté dans le code Génépi. Il regroupe des découpages de la maquette Clotaire (129 536 éléments) en  $N_s = 1, 2, 4, 8, 16$  et 32 sous-domaines sans recouvrement pour les 3 premiers cas et avec recouvrement pour les suivants – afin d'avoir des calculs qui convergent vers le régime stationnaire. On utilise un CPU par sous-domaine. La mémoire est par sous-domaine. Soulignons que nous testons ici une mise en œuvre industrielle de l'algorithme de décomposition de domaine en parallèle sous l'angle pragmatique de l'ingénieur. De fait, le calcul est arrêté si le régime stationnaire est atteint ( $\epsilon_{st} = 10^{-5} s^{-1}$ ) ou si on réalise 5 000 pas de temps. Le pas de temps  $\delta t$  est pris constant. On peut faire les remarques suivantes.

<sup>7</sup>Pour la simulation de la maquette Clotaire, un maillage ayant une résolution spatiale du centimètre n'est pas vraiment nécessaire dans le sens où cette valeur est inférieure au pas du faisceau de tubes – qui définit la taille minimale de la cellule d'homogénéisation, environ 2 cm de côté. Mais, dans le cas d'un GV industriel dont le rayon est 5 fois plus grand, une résolution spatiale de la taille du pas du faisceau requiert bien quelques millions d'éléments.

<sup>8</sup>A noter que le dernier sous-domaine (le numéro 8) ne contient plus de primaire et a donc un nombre de degrés de liberté différent des autres, ce qui nous a conduit à l'écarter.



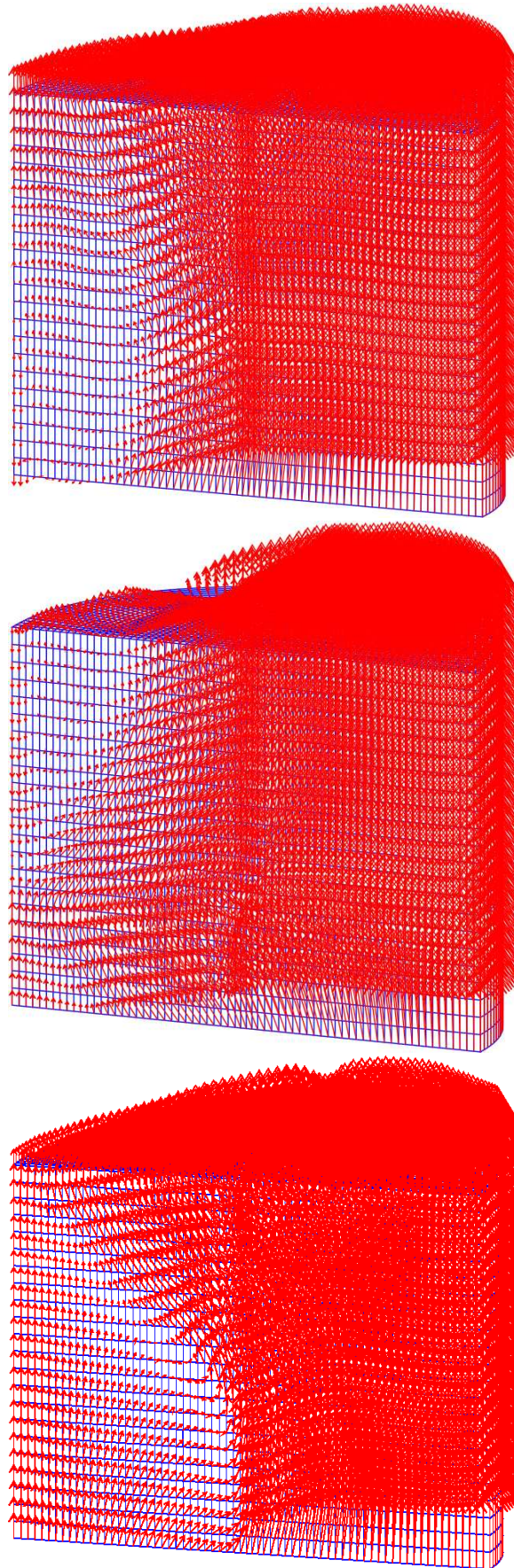


FIG. 1.7 – Décomposition de domaine en  $N_s = 32$  sous-domaines avec recouvrement ( $10^6$  cellules ; recouvrement de 3 couches d'éléments par interface) pour la simulation de la maquette Clotaire. Méthode Dirichlet-Neumann et Dirichlet-Neumann adaptée. Flux de masse du mélange au voisinage du front d'ébullition. Sous-domaine numéro 12 (bas), 13 (centre) et 14 (haut). Découpage en tranches du générateur de vapeur. Temps de la réalisation : 17h30 pour 7 500 pas de temps. Mémoire : 480Mo par CPU (15,36 Go au total).



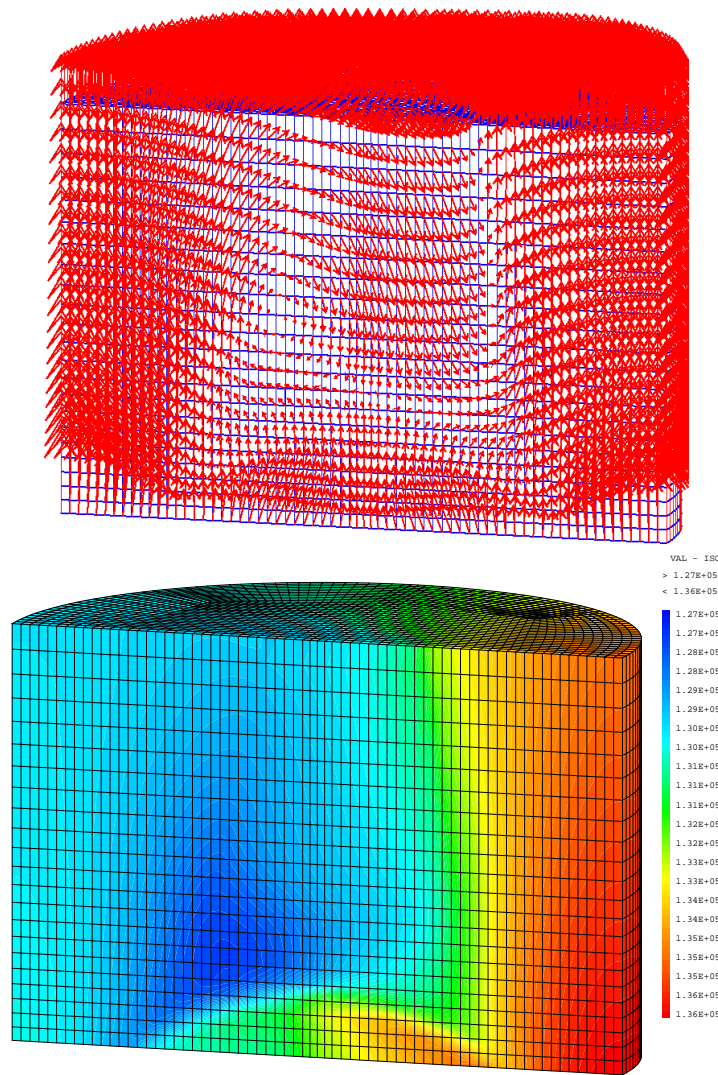


FIG. 1.8 – Décomposition de domaine en  $N_s = 32$  sous-domaines avec recouvrement ( $10^6$  cellules ; recouvrement de 3 couches d'éléments par interface) pour la simulation de la maquette Clotaire. Méthode Dirichlet-Neumann et Dirichlet-Neumann adaptée. Haut : flux de masse du mélange en sortie du chignon (sous-domaine numéro 28). Bas : enthalpie spécifique au même endroit. Découpage en tranches du générateur de vapeur. Temps de la réalisation : 17h30 pour 7 500 pas de temps. Mémoire : 480Mo par CPU (15,36 Go au total).

$N_s$	Mémoire (Mo)	Temps (s)	$S_p(N_s, ndof)$	$E_p(N_s, ndof)$	CPU échange / CPU itér.	%comm.
Référence	219,5	52 598				
2 sous-dom.	448,8	27 087	1,97	0,99	1,54%	2,4 %
4 sous-dom.	231,6	15 866	4,04	1,01	3,30%	2,4 %
8 sous-dom.	146,0	9 831	6,25	0,78	5,13%	8,3 %
16 sous-dom.	91,2	7 833	8,48	0,53	8,30%	24,1 %
32 sous-dom.	56,4	8 362	6,29	0,20	10,8%	49,3 %

TAB. 1.3 – Speed-up  $S_p$  et efficacité parallèle  $E_p$  pour l'algorithme de décomposition de domaine implémenté dans le code Génepi en fonction du découpage  $N_s$ . Les cas à 2 et 4 sous-domaines sont sans recouvrement et ceux à 8, 16 et 32 sous-domaines avec recouvrement. La référence est un calcul sans décomposition de domaine de la maquette Clotaire à  $ndof = 129\,536$  éléments. La mémoire indiquée est celle du processus le plus gourmand en mémoire. Le temps indiqué est celui de restitution du calcul. Le temps CPU échange est le temps de calcul pris pour la préparation des données à envoyer et à recevoir (interpolation, ...). Le % de communication est le rapport entre le temps pris par les communications et celui de restitution du calcul. Il est à noter que le critère de régime stationnaire  $\epsilon_{st} = 10^{-5} s^{-1}$  n'est pas complètement atteint au bout de 5 000 pas de temps pour les décompositions en 16 et 32 sous-domaines (respectivement :  $5 \cdot 10^{-5}$  et  $3 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ ).

- Le passage d'un découpage sans recouvrement à un découpage avec recouvrement s'accompagne d'une perte de performance numérique (mais permet la convergence de l'algorithme).<sup>9</sup>
- D'une façon générale, le pourcentage de temps CPU dédié aux opérations d'échange (interpolation, ...) reste raisonnable, au plus 10 %.
- En terme d'efficacité, le nombre optimum de sous-domaines pour ce maillage à 129 536 éléments, semble être situé vers une quinzaine de sous-domaines. Dans ces conditions, le calcul peut être accéléré d'un facteur 10. Rappelons toutefois que l'on reporte ici un test pragmatique (au sens du calcul réalisé par l'ingénieur) de notre algorithme en parallèle. C'est le critère d'obtention du régime stationnaire qui pilote le calcul et non un nombre fixe de pas de temps. D'ailleurs, le nombre de pas de temps requis pour cette obtention varie en fonction du découpage, comme discuté plus loin, cf. Fig. 1.10.
- Le découpage optimal est fonction de la granularité de la décomposition de domaine. De fait, considérons un maillage de calcul associé au domaine complet formé de  $n_c$  couches de  $s$  éléments. Si le recouvrement concerne  $r$  couches d'éléments, le nombre d'éléments par sous-domaine  $n_e$  varie en fonction du découpage  $N_s$  suivant la loi :  $n_e = s(\frac{n_c}{N_s} + 2r)$ . Par contre, le volume des échanges est proportionnel à  $s$  et au nombre moyen de frontières couplées par sous-domaine. Dans le cas de notre décomposition de domaine verticale du générateur de vapeur, ce nombre est autour de 3-4 pour un nombre suffisamment important de sous-domaines<sup>10</sup>, cf. Table 1.2. La granularité  $g$  est donc proportionnelle à  $g \approx \frac{(\frac{n_c}{N_s} + 2r)}{3,5}$  environ. Sa valeur dépend du cas d'étude. Par exemple, la valeur 5 – ddl de surface = 20 % ddl de volume – est obtenue vers 16 CPU pour 256 couches, cas de cette étude, mais vers 32 CPU pour 512 couches, cas du calcul à  $10^6$  éléments, cf. Fig. 1.9.

Enfin, on a regroupé sur la figure 1.10 les historiques de la variation relative temporelle de la variable  $G$  en fonction des itérations en temps pour différentes décompositions de domaine. Jusqu'à une partition en 8 sous-domaines, les historiques restent similaires à ceux du calcul de référence sans décomposition. Par contre, au delà, la convergence des calculs est d'autant plus

<sup>9</sup>Par exemple, dans ce cas de partition en 8 sous-domaines avec recouvrement, le recouvrement concerne 6 couches d'éléments sur les 36 du sous-domaine.

<sup>10</sup>Un sous-domaine courant possède une "entrée" de fluide secondaire et une de fluide primaire (composée d'une partie Dirichlet et d'une partie Neumann) par interface.

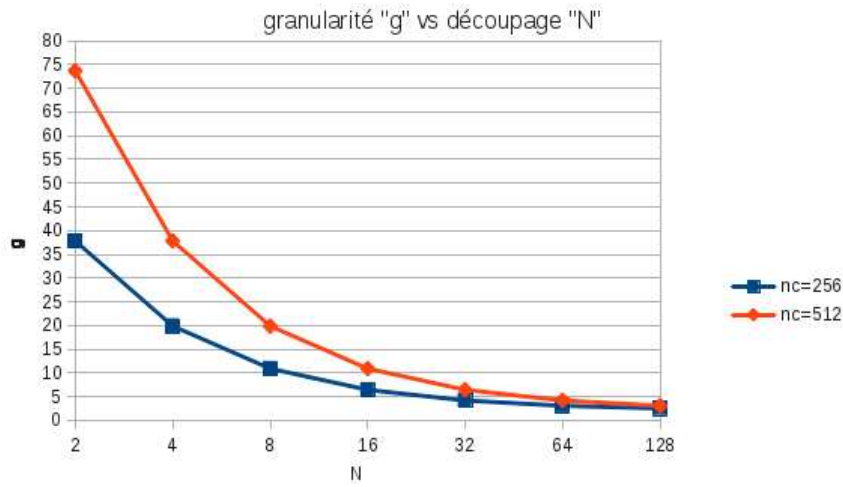


FIG. 1.9 – Évolution d'un modèle de granularité  $g \approx \frac{(\frac{n_c}{N_s} + 2r)}{3,5}$  en fonction du découpage  $N_s$  avec  $r = 3$  pour  $n_c = 256$  et  $n_c = 512$  couches d'éléments dans le maillage sans décomposition de domaine.

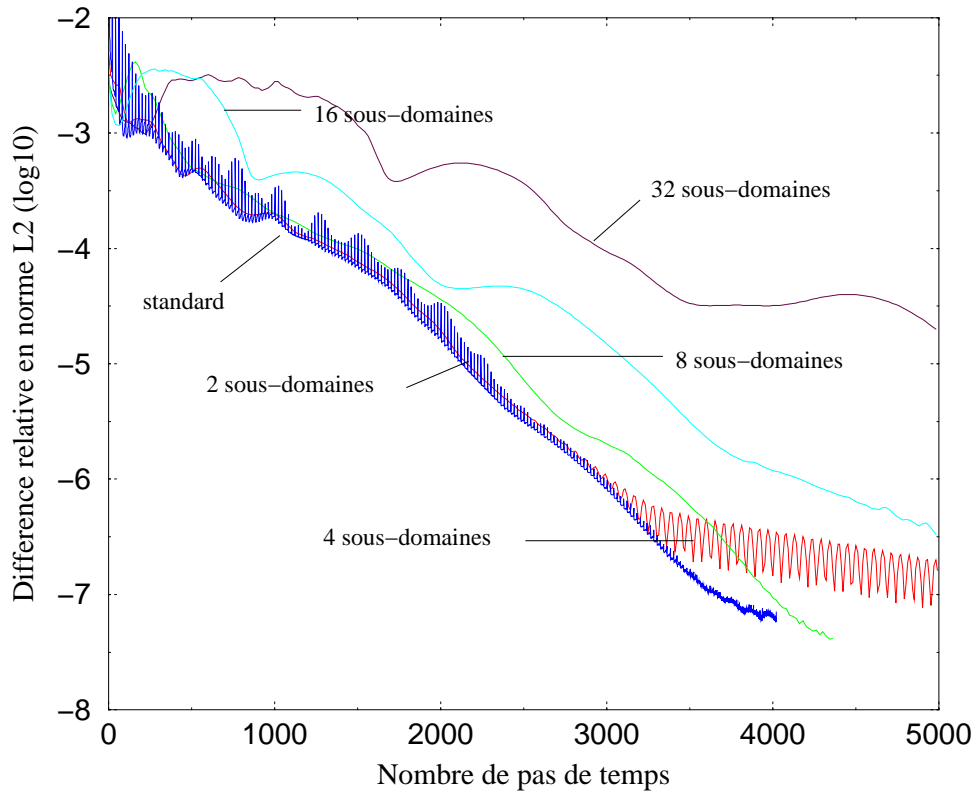


FIG. 1.10 – Historique de la variation relative temporelle de la variable  $G$  en fonction des itérations en temps pour différentes décompositions de domaine pour la simulation de la maquette Clotaire. Maillage à 129 536 éléments. Recouvrement des sous-domaines pour  $N_s$  (découpage) = 8, 16 et 32 sous-domaines, sans recouvrement sinon.

lente que le nombre de sous-domaines est grand. Cela est conforme aux résultats théoriques de la Section 1.2.1 détaillés dans l'Annexe A.2.

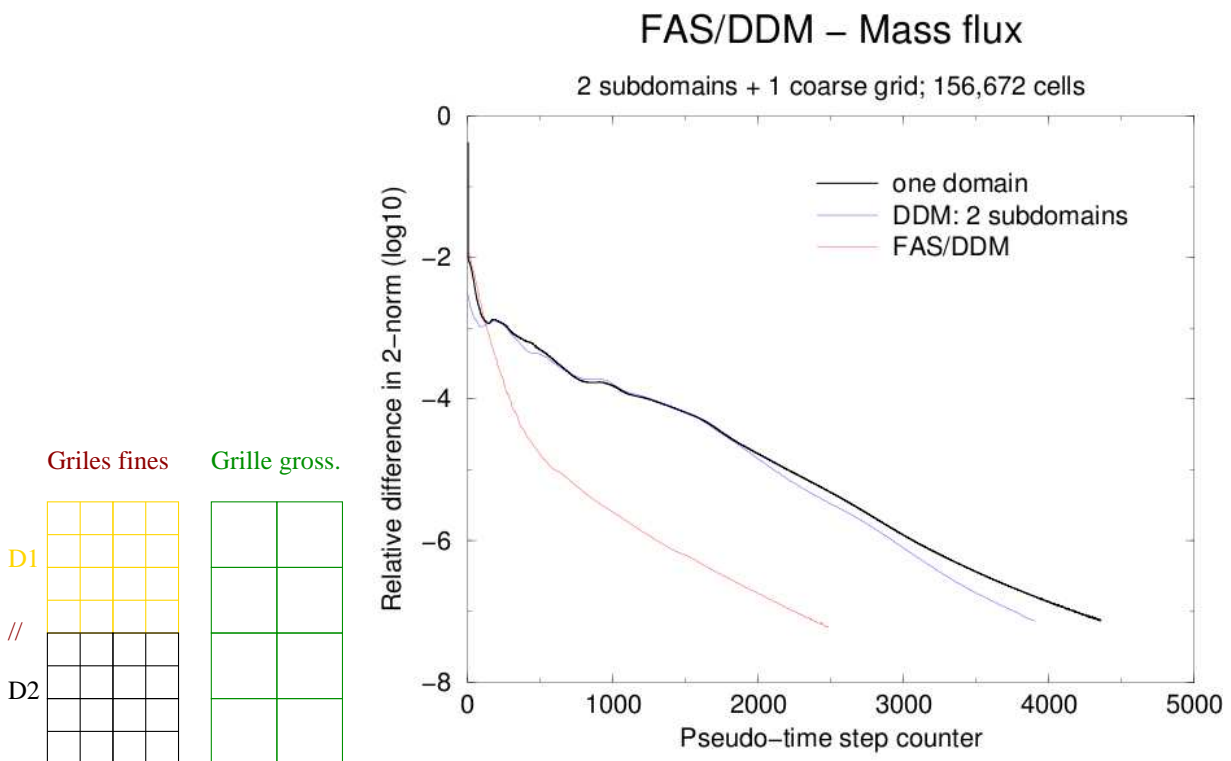


FIG. 1.11 – Exemple de préconditionnement par une grille grossière d'un calcul en décomposition de domaine sans recouvrement à deux sous-domaines. On utilise une méthode bi-grilles de type FAS pour améliorer la convergence des méthodes de décomposition de domaine surtout lorsque le nombre de sous-domaines devient grand. Historique de la différence relative en norme L2 du flux de masse entre deux pas de temps en fonction du nombre de pas de temps. Noir : 1 grille, bleu : 2 sous-domaines et rouge : 2 sous-domaines + 1 grille grossière. Maillages des sous-domaines ("Grilles fines") et de la grille grossière ("Grille gross.").

Une solution à ce problème consiste à introduire une grille grossière sur l'ensemble du domaine de calcul. La décomposition de domaine, couplée à la résolution du système d'équations de bilan sur cette dernière grille (méthode bi-grilles, cf. Chapitre 2), permet de ne pas dégrader la convergence de l'algorithme lorsque le nombre de sous-domaines croît. Cela est déjà pleinement efficace pour deux sous-domaines, cf. Fig. 1.11 (Belliard 2003).

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Pour la simulation des écoulements diphasiques en régime stationnaire dans un GV, nous avons démontré l'efficacité d'un algorithme original basé sur une version additive des méthodes Dirichlet-Neumann et Dirichlet-Neumann adaptée (Quarteroni 1990). La décomposition de domaine est réalisée pour la résolution de l'ensemble des équations non linéaires de bilan des fluides primaire et secondaire. Nous tirons partie du parallélisme intrinsèque et du préconditionnement introduit par cette approche. Notre algorithme fonctionne dans le cas d'un recouvrement des sous-domaines ou sans celui-ci. En cas de recouvrement, sa robustesse en est accrue. Le maillage global du domaine de calcul peut être conforme ou non. La méthode Dirichlet-Neumann adaptée permet, pour le bilan d'enthalpie secondaire, de

traiter la présence éventuelle de vortex au niveau des interfaces entre les sous-domaines. Les tests effectués dans le contexte industriel concluent à la réduction importante du nombre d'itérations en temps et du temps CPU. Par conséquent, le nombre usuel de cellules du maillage de calcul ( $\approx 30\,000$ ) peut être facilement porté à 1 000 000 sur un cluster de stations de travail. Nous devons souligner l'intérêt d'un coupleur de code, comme Isas développé au CEA, pour la parallélisation des tâches informatiques à l'aide d'un réseau, sans re-engineering du code de base. Toutefois, ce choix implique des limitations sur les capacités parallèles du calcul. Pour illustrer ce point, la loi d'Amdahl permet l'estimation de la partie parallèle du code et de l'accélération maximale possible. J'ai trouvé, en fonction de la taille du problème, des valeurs d'environ 70 à 90% et de 4 à 8, respectivement. Par comparaison avec les capacités des machines massivement parallèles, ce niveau d'accélération est faible, mais suffisant pour les applications visées.

La décomposition de domaine avec recouvrement est également utilisée dans les travaux décrits ci-après concernant les domaines fictifs, cf. Chapitre 4.

# DÉCOMPOSITION FRÉQUENTIELLE DE DOMAINE (MULTI-GRILLES)

## SOMMAIRE

2.1	CONTEXTE . . . . .	31
2.1.1	Enjeux et motivations . . . . .	31
2.1.2	Objectifs et approche générale . . . . .	31
2.2	MÉTHODES MULTI-GRILLES . . . . .	31
2.2.1	Introduction . . . . .	32
2.2.2	Pistes de recherche et cadre logiciel . . . . .	34
2.2.3	Un Algorithme pseudo-FMG FAS en séquentiel et en parallèle . . . . .	35
2.3	APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR . . . . .	39
2.3.1	Cycle dynamique et convergence . . . . .	39
2.3.2	Parallélisme . . . . .	41
2.3.3	Sensibilité de l'algorithme aux paramètres de calcul . . . . .	41
	CONCLUSION . . . . .	41

ON s'intéresse ici aux méthodes de décomposition de domaine en fréquence (méthodes multi-grilles ou multi-résolution). Le principe directeur repose sur la décomposition en fréquence de l'erreur d'approximation de la solution d'une Équation aux Dérivées Partielles, EDP, et la réduction successive de celle-ci sur chaque gamme de fréquence.

Après avoir donné des éléments théoriques concernant ce type de méthode, on se focalise sur la mise en œuvre en parallèle de l'algorithme de type FAS que j'ai développé pour la simulation des générateurs de vapeur afin de réduire le temps de restitution des calculs comportant un grand nombre de degrés de liberté.



## 2.1 CONTEXTE

La simulation des composants nucléaires nécessite des maillages comportant un nombre toujours plus important de cellules de calcul. De fait, l'obtention du régime stationnaire via un transitoire – la majorité des études produites sur les GV – demande de plus en plus d'itérations en temps de par les contraintes de stabilité sur le pas de temps. Les méthodes multi-grilles non linéaires permettent d'accélérer le calcul du stationnaire.

### 2.1.1 Enjeux et motivations

Comme décrit au Chapitre d'introduction (cf. page 3), la simulation industrielle des composants nucléaires utilise couramment des maillages de l'ordre de 50 000 à 150 000 cellules. Ce nombre représente la limite supérieure des calculs sur station de travail multi-cœurs. Une limitation provient du nombre nécessaire d'itérations en temps pour l'obtention du régime permanent. Le calcul peut mettre en jeu environ 10 000 itérations en temps. Chaque pas de temps pouvant prendre une vingtaine de secondes en séquentiel, cela conduit à des simulations de plus de deux jours. Plus le pas d'espace diminue, plus le pas de temps fait de même de par les contraintes de stabilité. En effet, même si les opérateurs de diffusion et de frottement, voire de convection, utilisent un schéma implicite en temps, les termes sources sont généralement explicites. Leurs dépendance forte vis-à-vis des variables restreint le pas de temps en pratique.

### 2.1.2 Objectifs et approche générale

L'objectif de ce chapitre est l'étude d'une méthode permettant d'accélérer l'obtention du régime permanent de l'écoulement en réduisant le nombre d'itérations en temps.

Pour cela, on considère ici les méthodes multi-grilles qui, dans les grandes lignes, décomposent en fréquence (ou en échelle) l'erreur de calcul et réduisent chaque composante fréquentielle séparément. Plus précisément, à partir de l'erreur initiale sur la grille de départ (dite fine), un filtrage en échelle produit une série d'erreurs – ou d'approximations – sur des grilles de plus en plus grossières : phase de restriction. Sur chaque grille, on réduit l'erreur par un processus approprié. Et enfin, on recompose une erreur large spectre sur la grille fine : phase de prolongement. Cet algorithme, intrinsèquement séquentiel, peut se décliner sous une forme parallèle.

L'approche abordée ici est complémentaire de celle en décomposition de domaine présentée au Chapitre 1. En effet, l'utilisation de la décomposition de domaine permet d'augmenter le nombre de cellules de la discrétisation spatiale, ce qui conduit donc à réduire le pas de temps et à rallonger le temps de calcul. Les méthodes multi-grilles permettent alors de contrer cette tendance.

## 2.2 MÉTHODES MULTI-GRILLES

**[●] Méthodes multi-grilles linéaires ou non-linéaires permettant d'accélérer la résolution d'un problème défini sur une grille fine à partir de résolutions sur des grilles plus grossières.**

Interactions :

Publication associée : Belliard (2006)

Conférence associée : Belliard et Grandotto (2003b) et Belliard (2003)



### 2.2.1 Introduction

Les méthodes multi-grilles sont des algorithmes très efficaces de résolution d'équations (linéaires ou non) sur une grille, surtout lorsque le nombre d'inconnues est important (maillage très fin). Ce type de méthode a été introduit par R. P. Fedorenko et A. Brandt pour la résolution d'équations elliptiques (Fedorenko 1962, Brandt 1977). On peut classer les méthodes multi-grilles en deux catégories suivant qu'elles visent à résoudre un problème linéaire ou non. Dans le premier cas, on se focalise sur l'erreur (version dite *Correction Storage* ; CS), tandis que dans le second cas, on privilégie l'approximation (version dite *Full Approximation Storage* ; FAS).

Considérons chaque équation de bilan (1)-(3) sous la forme générale d'un résidu discret non linéaire  $T_0(s_0) = 0$  fonction de la solution  $s_0 \in V_0(\Omega_0)$ ,  $V_0(\Omega_0)$  espace vectoriel des solutions discrètes sur la grille de calcul  $\Omega_0$ . La formulation de type résidu pondéré  $r_0^i(s_0)$  associée en Éléments Finis, EF, Galerkin est :

$$r_0^i(s_0) = - \int T_0(s_0) \varphi_0^i(x) dx = 0, \forall \varphi_0^i \in V_0(\Omega_0) \quad + CL. \quad (2.1)$$

où  $\varphi_0^i$  est une fonction de base EF au nœud  $i$ . Soit un ensemble de maillages emboîtés de plus en plus grossiers  $\Omega_l$ ,  $0 < l \leq l_{max}$  où  $l_{max}$  représente l'index de la grille la plus grossière, cf. Fig. 2.1. La grille initiale de calcul est aussi dénommée grille fine.

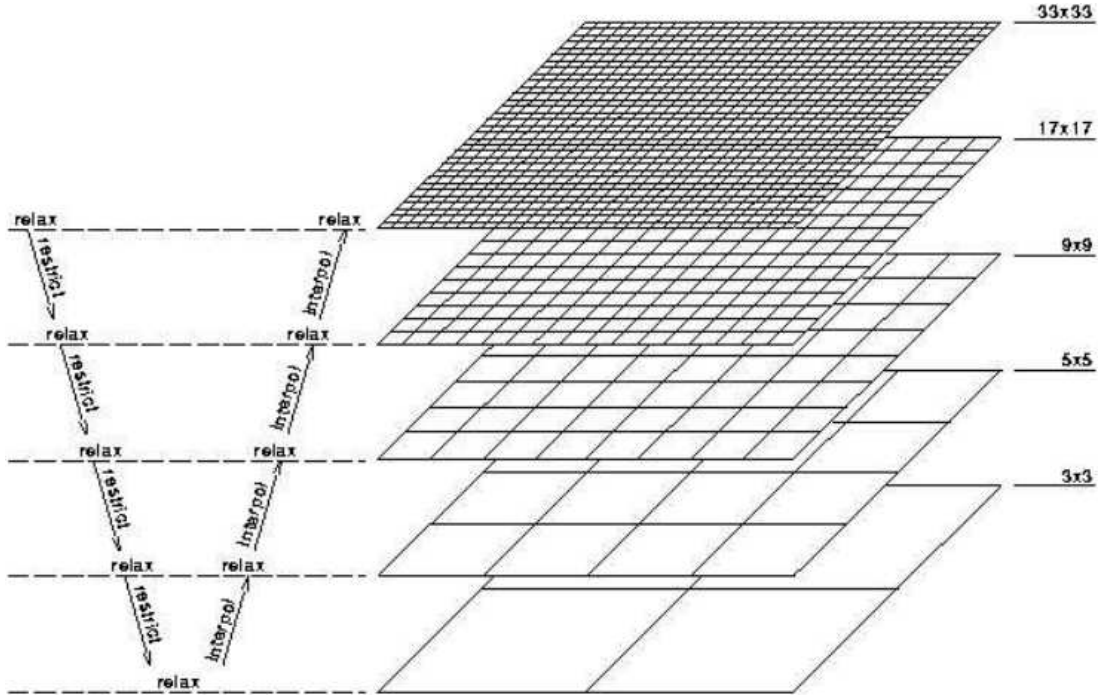


FIG. 2.1 – Méthode multi-grilles : schéma de principe d'un V-cycle de la méthode multi-grilles avec  $l_{max} = 4$ . Ici la grille fine  $\Omega_0$  est celle à  $32 \times 32$  cellules et la plus grossière  $\Omega_4$  est celle à  $2 \times 2$  cellules.

On décompose l'approximation de l'inconnue  $u$  ou l'erreur  $e := s - u$  sur une base hiérarchique liée à l'ensemble des grilles emboîtées. Le but de la méthode est de réaliser une estimation de l'erreur sur chaque grille afin de corriger à toutes les échelles l'approximation  $u_0$  de la grille de calcul  $\Omega_0$ . Le point clef est que, pour une grille donnée  $\Omega_l$ , il est relativement facile de réduire les composantes de grandes fréquences de l'erreur par la mise en œuvre d'une méthode itérative sur un petit nombre  $cp$  d'itérations – fonctionnement en lissage ou relaxation. Au contraire, l'atténuation des composantes de basses fréquences nécessite beaucoup plus d'efforts – un grand nombre d'itérations. Ces dernières sont donc réduites sur la

grille grossière suivante  $\Omega_{l+1}$ .

Un algorithme multi-grilles en V-cycle, cf. Fig. 2.1, est ainsi composé de la façon suivante.

1. Un pré-lissage ( $cp_0$  itérations) sur  $\Omega_0$  de Eq. (2.1) donnant l'approximation  $u_0$  et le résidu  $r_0(u_0) = -(\dots, \int T_0(u_0)\varphi_0^i(x) dx, \dots)^T$ .
2. Une étape de *descente* formée d'une séquence emboîtée de restrictions sur  $\Omega_{l+1}$ ,  $0 \leq l < l_{\max} - 1$ , du résidu  $r_l(u_l)$  et, dans le cas de FAS, de l'approximation  $u_l$  :

$$\bar{r}_{l+1} = \hat{R}_{l+1}^l r_l \quad (2.2)$$

$$\bar{u}_{l+1} = R_{l+1}^l u_l \quad (2.3)$$

suivie de  $cp_{l+1}$  itérations de pré-lissages de :

$$\int T_{l+1}(u_{l+1})\varphi_{l+1}^I(x) dx = S_{l+1}^I \quad \forall \varphi_{l+1}^I \in V_{l+1} \quad (2.4)$$

$$S_{l+1}^I = \bar{r}_{l+1}^I \text{ (CS)} \quad (2.5)$$

$$S_{l+1}^I = \int T_{l+1}(\bar{u}_{l+1})\varphi_{l+1}^I(x) dx + \bar{r}_{l+1}^I \text{ (FAS)}. \quad (2.6)$$

Pour le schéma CS,  $u_{l+1}$  se comprend ici comme une erreur et non une approximation.

3. Une restriction du résidu  $r_{l_{\max}-1}(u_{l_{\max}-1})$  et, dans le cas de FAS, de l'approximation  $u_{l_{\max}-1}$  sur  $\Omega_{l_{\max}}$ , suivie de la résolution – méthode multi-grilles idéale – ou du lissage –  $cp_{l_{\max}}$  itérations ; méthode multi-grilles non idéale – de :

$$\int T_{l_{\max}}(u_{l_{\max}})\varphi_{l_{\max}}^I(x) dx = S_{l_{\max}}^I \quad \forall \varphi_{l_{\max}}^I \in V_{l_{\max}} \quad (2.7)$$

$$S_{l_{\max}}^I = \bar{r}_{l_{\max}}^I \text{ (CS)} \quad (2.8)$$

$$S_{l_{\max}}^I = \int T_{l_{\max}}(\bar{u}_{l_{\max}})\varphi_{l_{\max}}^I(x) dx + \bar{r}_{l_{\max}}^I \text{ (FAS)}. \quad (2.9)$$

On dispose ainsi de l'erreur sur la grille grossière ( $e_{l_{\max}} := u_{l_{\max}}$ , schéma CS) ou on la forme par  $e_{l_{\max}} = u_{l_{\max}} - \bar{u}_{l_{\max}}$  (schéma FAS).

4. Une étape de *remontée* formée d'une séquence emboîtée de prolongements sur  $\Omega_{l-1}$ ,  $1 < l \leq l_{\max}$ , de l'erreur  $e_l$  :

$$e_{l-1} = P_{l-1}^l e_l \quad (2.10)$$

et, pour le schéma FAS, de la correction de l'approximation  $u_{l-1}$  par :

$$u_{l-1} + \alpha e_{l-1} \quad (2.11)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de relaxation éventuelle ; suivi de  $cp_{l-1}^{post}$  itérations de post-lissage.

5. Un prolongement sur  $\Omega_0$  de l'erreur  $e_1$ , suivi d'une correction de l'approximation  $u_0 + \alpha e_0$ , avec  $e_0 = P_0^1 e_1$  et de  $cp_0^{post}$  itérations de post-lissage.
6. Un test de convergence décidant de la poursuite d'un nouveau V-cycle ou de l'arrêt de l'algorithme.

La version *Full Multigrid*, FMG, d'une méthode multi-grilles commence ce cycle de résolution par une méthode bi-grilles à partir de  $\Omega_{l_{\max}}$  et  $\Omega_{l_{\max}-1}$  et enrichie progressivement celui-ci par la prise en compte des grilles  $\Omega_l$  avec  $0 \leq l < l_{\max} - 1$ . Une fois la grille fine incorporée, l'algorithme se poursuit de façon classique. Sous certaines conditions, on obtient une méthode optimale.

On distingue deux classes de méthodes multi-grilles : les méthodes géométriques et celles algébriques. La différence essentielle entre une méthode géométrique et une méthode algébrique repose sur la façon dont on forme la matrice du système à résoudre sur chaque grille. Dans le cas de l'approche géométrique, on discrétise les EDP sur chaque grille  $\Omega_l$ ,  $0 < l \leq l_{max}$ , pour assembler la matrice. Par contre, dans le cas algébrique, la matrice de la grille  $\Omega_l$  est obtenue à partir de manipulations algébriques des entrées de la matrice de la grille  $\Omega_{l-1}$ .

### 2.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel

Les principales pistes de recherche concernent :

- la résolution d'un système d'équations stationnaires fortement non linéaires, équations de bilans Eqs (1)-(3) sans terme en temps, par une méthode bi-grilles géométrique de type pseudo-FMG FAS, en séquentiel, et son optimisation dans le cas de la simulation du GV ( $cp_l, \alpha, \dots$ ). Dans cette approche, le schéma en temps permettant l'obtention du stationnaire est inclus dans les lissages. De fait, il correspond à un liseur non linéaire.
- La déclinaison de la méthode décrite ci-dessus pour la mise en œuvre originale d'une version multi-grilles en parallèle; un certain nombre de grilles étant résolu simultanément. La parallélisation des méthodes multigrilles, tout en conservant une méthode optimale en terme de convergence, n'est pas évidente. La réponse la plus intuitive consiste à paralléliser la résolution sur chaque grille; tout en conservant un balayage séquentiel des grilles – comme illustré en bi-grilles à la Section 1.3.3. On peut aussi envisager, comme pour la méthode BPX (Bramble et al. 1990), la restriction des résidus en séquentiel sur l'ensemble des grilles, suivie par des lissages en parallèle (éventuellement chaque lissage étant lui même parallélisé). Une suite de projections des erreurs en séquentiel sur les grilles fines conclue alors le cycle multi-grilles.

D'un point de vue informatique, on utilise les mêmes outils que pour les méthodes de décomposition de domaine, cf. Section 1.2.2. Chaque grille de calcul  $\Omega_l$ ,  $0 \leq l \leq l_{max}$ , est associée à une tâche informatique *esclave* – une instance du code Génepi – pilotée par une tâche *maître* Isas. Ici, la notion de frontière couplée de la décomposition de domaine est généralisée par celle de région volumique nécessitant des données externes – pouvant contenir éventuellement tous les nœuds du calcul. De même, la notion de type de condition limite est généralisée par des *frontières* de type *correction d'équations* – cf. Eq. (2.6); grilles grossières FAS – ou *correction d'erreurs* – cf. Eq. (2.11); Grilles fines FAS. En fonction de ce type de *condition limite*, les données externes requises correspondent, respectivement, à des approximations et des résidus ou à des erreurs. Lors d'un couplage, chaque tâche Génepi envoie les données externes nécessaires aux autres tâches, puis reçoit ses propres données requises. Comme mentionné à la Section 1.2.2, une astuce logicielle permet de construire un algorithme multi-grilles mixte séquentiel/parallèle<sup>1</sup>.

Il est à noter que l'ordre de grandeur du nombre de grilles grossières nécessaires à nos applications est seulement de quelques unités. En effet, le rapport  $r = \frac{h_{l-1}}{h_l}$  des pas d'espace entre deux grilles successives est en pratique au moins de 2. Avec un maillage d'hexaèdres, on divise le nombre de cellules d'un facteur  $r^3 = 8$  entre  $\Omega_l$  et  $\Omega_{l-1}$ . En prenant par exemple  $l_{max} = 4$  et  $10^7$  cellules sur  $\Omega_0$ , le nombre de cellules sur la grille grossière  $\Omega_{l_{max}}$  n'est plus que d'environ 2 450. C'est la limite inférieure, en nombre de cellules, pour un calcul grossier représentatif.

**Remarque 2.1** Bien que je me limite ici à la seule présentation de l'algorithme original de type FAS géomé-

<sup>1</sup>ou purement séquentiel.

trique que j'ai développé pour la simulation du générateur de vapeur, je peux également mentionner l'utilisation de méthodes multi-grilles algébriques, cf. Annexe A.5.

**Remarque 2.2** De même, et non présenté ici, j'ai effectué des recherches portant sur un solveur ondelette/multi-résolution en tant que préconditionneur d'une méthode de Krylov pour résoudre des systèmes linéaires liés à une EDP de type diffusion-réaction (CEMRACS'98), cf. Annexe A.6.

### 2.2.3 Un Algorithme pseudo-FMG FAS en séquentiel et en parallèle

Je propose ici un algorithme original basé sur une version géométrique de la méthode FAS (Brandt 1977) pour la résolution des équations de bilan du fluide secondaire du générateur de vapeur Eqs (1)-(3). Cet algorithme tient compte des spécificités du système d'EDP fortement non linéaires et des caractéristiques du schéma fractionnaire de type projection utilisé pour le calcul de la pression.

Les contraintes industrielles de mise en œuvre de l'algorithme militent pour minimiser les modifications logicielles du code Génepi. De fait, il peut se produire une perte de consistance entre les grilles  $\Omega_l$  de certains termes – terme de frottement et porosité du fluide secondaire par exemple. Afin de ne pas être pénalisé par une possible stagnation de la convergence de la méthode, je propose une gestion dynamique des cycles multi-grilles.

Je décris ci-dessous les ingrédients de l'algorithme multi-grilles mis en place. A part les opérateurs de restriction et de prolongement, ce sont des contributions nouvelles. Une présentation détaillée de l'algorithme est fait dans Belliard (2006).

#### Caractéristiques globales de l'algorithme

Les EDP résolues sont celles du système Eqs (1)-(3) dans leur version stationnaire. Ici, le symbole  $\bar{r}_{l+1}$  de Eq. (2.2) représente le résidu du bilan d'enthalpie ou de quantité de mouvement du fluide secondaire restreint sur  $\Omega_{l+1}$ <sup>2</sup>. De même, le symbole  $\bar{u}_{l+1}$  de Eq. (2.3) représente les variables primaires (i.e. non conservatives) : enthalpie, flux de masse, pression et température primaire. Ce sont également les erreurs associées à ces mêmes variables qui sont à prolonger sur  $\Omega_l$ . La méthode multi-grilles n'est donc pas en œuvre pour le bilan d'énergie du fluide primaire. Mais on introduit la restriction de la température primaire dans le calcul du terme correctif  $\int T_{l+1}(\bar{u}_{l+1}) \phi_{l+1}^l(x) dx$  du bilan d'enthalpie secondaire et la température primaire de la grille fine est également corrigée. Ici, j'ai choisi de privilégier le flux de masse au lieu de la vitesse de façon à rester compatible avec la conservation de la masse (voir ci-dessous).

Le lisseur utilisé dans les cycles multi-grilles correspond à  $cp_l$  itérations d'un schéma de Picard relaxé. C'est à dire  $cp_l$  pas de temps du schéma en temps semi-implicite initial de Génepi sur les équations linéarisées de bilan. Ces pas de temps diffèrent généralement d'une grille à l'autre. L'algorithme commence par  $cp_{l_{max}}^0$  itérations sur la grille la plus grossière  $\Omega_{l_{max}}$ , sans aucune correction multi-grilles, avant de prolonger l'erreur sur la grille  $\Omega_{l_{max}-1}$ . Pour l'approche FMG, ce nombre doit être suffisant pour résoudre l'écoulement sur la grille grossière. En fait, de part la pauvreté de la modélisation physique sur la grille la plus grossière, il n'est pas intéressant de suivre cette approche, mais plutôt de seulement "lisser" avec un nombre relativement important d'itérations. Nous obtenons alors un algorithme de type pseudo-FMG. D'une façon générale, on réalise des cycles en '\', i.e. sans post-lissage.

Pour la mise en œuvre industrielle, la construction des grilles se fait à partir de  $\Omega_{l_{max}}$  par des raffinements 3D successifs avec  $r = 2$ . Les bords de la grille fine de calcul  $\Omega_0$  correspondent

<sup>2</sup>Le résidu associé à la conservation de la masse est nul car celle-ci est résolue par une méthode directe à la précision machine sur chaque grille.

donc à ceux de  $\Omega_{l_{max}}$ , cf. Fig. 2.4. Vis-à-vis de la définition de  $\partial\Omega_0$  directement à partir de la discrétisation en hexaèdres de la géométrie de l'évaporateur (globalement cylindrique), il y a donc une certaine différence, fonction du rapport entre les pas d'espace  $h_0$  et  $h_{l_{max}}$ . Mais cette façon de procéder permet une construction aisée d'une base hiérarchique EF sans introduire de fonction de forme supplémentaire sur les bords (fonction EF courbe par exemple) et n'introduit pas de d'incohérence majeure.

### Termes de correction de la grille grossière

Le terme non linéaire  $\int T_l(\bar{u}_l) \varphi_l^I(x) dx$  de la correction de grille grossière  $\Omega_l$ ,  $0 < l \leq l_{max}$ , cf. Eq. (2.4), s'écrit pour chaque EDP (1)-(3) (stationnaire) :

$$\int T_l(\bar{u}_l) \psi_l^E(x) dv \equiv \int dv \psi_l^E(x) \nabla \cdot (\beta_l \bar{\mathbf{G}}_l), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \int T_l(\bar{u}_l) \varphi_l^I(x) dv &\equiv \int dv \varphi_l^I(x) [\beta_l (\bar{\mathbf{G}}_l \nabla) \bar{\mathbf{v}}_l + \text{div}(\beta_l \bar{x}_l (1 - \bar{x}_l) \bar{\rho}_l \bar{\mathbf{v}}_{\bar{\mathbf{R}}_l} \otimes \bar{\mathbf{v}}_{\bar{\mathbf{R}}_l})] \\ &\quad - \int dv \varphi_l^I(x) \beta_l \bar{\rho}_l (\mathbf{g} - \bar{\Lambda}_l \bar{\mathbf{v}}_l) \\ &\quad - \int dv \nabla \varphi_l^I(x) [\beta_l \bar{P}_l - \beta_l \bar{\mu}_T (\nabla \bar{\mathbf{v}}_l + \nabla^t \bar{\mathbf{v}}_l)], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \int T_l(\bar{u}_l) \varphi_l^I(x) dv &\equiv \int dv \varphi_l^I(x) [\beta_l (\bar{\mathbf{G}}_l \nabla) \bar{H}_l + \text{div}(\beta_l \bar{x}_l (1 - \bar{x}_l) \bar{\rho}_l \bar{L}_l \bar{\mathbf{v}}_{\bar{\mathbf{R}}_l})] \\ &\quad - \int dv \varphi_l^I(x) \beta_l \bar{Q}_l + \int dv \nabla \varphi_l^I(x) (\beta_l \bar{\chi}_T \nabla \bar{H}_l), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $\psi_l^E$  (respectivement  $\varphi_l^I$ ) est la fonction de forme Q0 (respec. Q1) associée à la pression (respec. à la vitesse, au flux de masse et à l'enthalpie). Les coefficients de ces corrections sont calculés à partir des variables restreintes  $\bar{H}_l$ ,  $\bar{\mathbf{G}}_l$ ,  $\bar{P}_l$  et  $\bar{T}_{p_l}$ . Par exemple,  $\bar{\rho}_l$  est défini par  $\bar{\rho}_l(\bar{H}_l, \bar{P}_l)$ .

Remarquons que le terme de correction de la masse (2.12) n'est pas utilisé tel quel. Mais on force le champ de flux de masse ( $\mathbf{G}_l - \bar{\mathbf{G}}_l$ ) à être à divergence nulle lors de l'étape de projection.

### Opérateurs de restriction et prolongement

Les opérateurs de restriction  $\hat{R}_{l+1}^l$  et  $R_{l+1}^l$  mentionnés dans les Eqs (2.2) et (2.3) sont définis comme il suit.

Les résidus aux nœuds grossiers  $I$  sont classiquement obtenus par une restriction par moyenne pondérée des résidus aux nœuds fins  $i$  :

$$\bar{r}_{l+1}^I = \hat{R}_{l+1}^l r_l = \sum_i \varphi_{l+1}^I(x_i) r_l^i. \quad (2.15)$$

Les variables aux nœuds grossiers  $I$  sont obtenus par restriction canonique :

$$\bar{u}_{l+1}^I = R_{l+1}^l u_l = u_l^i. \quad (2.16)$$

On utilise également la restriction canonique pour fournir les valeurs nodales en condition limite de type Dirichlet ( $\bar{H}_{l+1}$ ,  $\bar{\mathbf{G}}_{l+1}$ ) sur les grilles grossières  $\Omega_{l+1}$ ,  $0 \leq l < l_{max}$ , à partir de celles de  $\Omega_0$ .

Pour les variables aux éléments (i.e. pression, température primaire, ...), on utilise une restriction par moyenne volumique pour déterminer la valeur de la variable dans l'élément grossier  $E$  :

$$|E| \bar{u}_{l+1}^E = R_{l+1}^l u_l = \sum_{e \in E} u_l^e |e| \quad (2.17)$$

où  $|e|$  et  $|E|$  sont les mesures des éléments  $e$  et  $E$ .

L'opérateur de prolongement  $P_{l-1}^l$  correspond à une interpolation trilinéaire ( $m_P = 2$ ). Avec la restriction par moyenne pondérée ( $m_R = 2$ ), ils vérifient la relation :

$$(m_P + 1) + (m_R + 1) > 2m \quad (2.18)$$

où  $m$  est l'ordre de l'EDP considérée (ici  $m = 2$ ). Théoriquement, ceci permet d'obtenir une convergence indépendante de  $h$ , cf. (Albers 2000) et les références incluses.

### Schéma fractionnaire pour le calcul de la pression

Lors de la phase de descente, la restriction du flux de masse  $\bar{G}_{l+1}$  sur la grille grossière  $\Omega_{l+1}$  conduit à redéfinir une valeur de référence pour la divergence, cf. RHS de Eq. (2.12). On projette alors le flux de masse  $G_{l+1}$  dans cet espace à divergence imposée via une technique de multiplicateurs de Lagrange (Gresho et al. 1984). Puis la technique CPPE (Gresho 1991), permet de calculer une pression  $P_{l+1}$  avant pré-lissage.

Lors de la phase de remontée, le prolongement de l'erreur sur le flux de masse ( $G_{l+1} - \bar{G}_{l+1}$ ) permet de corriger le flux de masse sur le maillage fin  $G_l$ . Avant d'effectuer le post-lissage pour des itérations de Picard, une nouvelle pression est calculée par l'approche CPPE. Pour plus de détails, on se reportera à Belliard (2006).

### Consistance de l'approche géométrique et cycle dynamique

L'algorithme multi-grilles étant de type géométrique, la porosité et les obstacles sont modélisés de façon indépendante sur chaque grille de calcul à partir d'une description unique des dispositifs technologiques internes. Cela conduit à des champs de porosité et des zones impactées par les obstacles qui diffèrent d'une grille à l'autre. Par exemple, les forces de friction (induites par le faisceau de tubes et/ou les plaques de support compris dans une cellule) peuvent être appliquées à un nœud de la grille grossière  $\Omega_{l+1}$ , mais pas au nœud de la grille fine  $\Omega_l$ , voir Fig. 2.2.

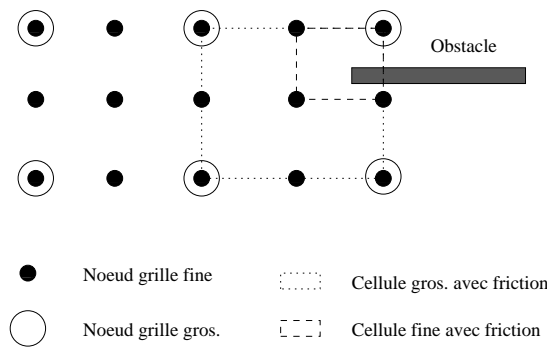


FIG. 2.2 – Modélisation du terme de friction sur un obstacle.

A cause de la non consistance des champs de porosité et des termes de frottement entre grilles, la convergence de l'algorithme ne peut être garantie. La non correction du bilan d'énergie primaire sur la grille grossière concourt également à ça.

Afin de résoudre ce problème, lié en particulier au choix de l'homogénéisation des internes – solution souvent retenue dans les codes industriels –, je propose une gestion dynamique des cycles multi-grilles basée sur un indicateur du taux relatif de diminution de l'erreur. L'objectif est de revenir au solveur standard de Génepi – sans corrections FAS des variables sur la grille

(fine) de calcul  $\Omega_0$  – dès que la stagnation de l'erreur est détectée. Un ensemble d'indicateurs  $\{ind_{l+1}(e_{l+1})\}$ ,  $0 \leq l < l_{max}$ , sur les grilles grossières  $\Omega_{l+1}$  est défini par :

$$ind_{l+1}(e_{l+1}) = \frac{abs(|e_{l+1}|_{L^2}^m - |e_{l+1}|_{L^2}^{m-1})}{|e_{l+1}|_{L^2}^{ref}} \quad (2.19)$$

avec  $m$  le numéro du cycle multi-grilles,  $|e_{l+1}|_{L^2}$  la norme  $L^2$  de l'erreur (enthalpie ou flux de masse secondaire) sur  $\Omega_{l+1}$  et  $|e_{l+1}|_{L^2}^{ref}$  une erreur de référence. On définit également un ensemble de *cut-off*  $\epsilon_{l+1}^{MG}$ ,  $0 \leq l < l_{max}$ , spécifique à chaque variable.<sup>3</sup> Lorsqu'on vérifie sur la grille grossière  $\Omega_{l+1}$ ,  $0 \leq l < l_{max}$ ,

$$ind_{l+1}(e_{l+1}) < \epsilon_{l+1}^{MG}, \quad (2.20)$$

on ne corrige plus la variable associée sur la grille  $\Omega_l$ . En cas de vérification de Eq. (2.20) par toutes les variables, le calcul est stoppé sur les grilles  $\Omega_m$ ,  $l + 1 \leq m \leq l_{max}$ .

### Parallélisme

Ici, la parallélisation a été réalisée de façon originale en mettant en place une méthode de type en damiers (*noir/blanc*) à partir de l'algorithme bi-grilles.

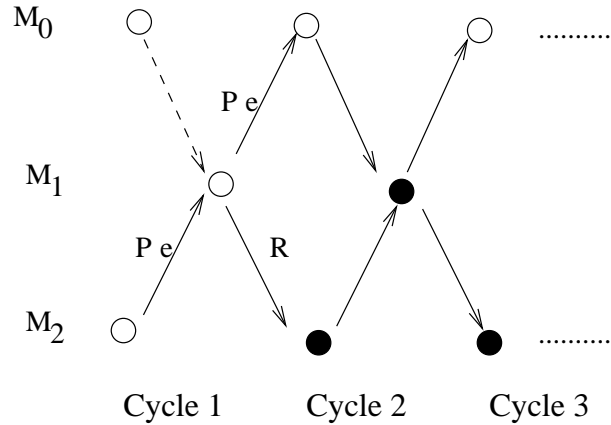


FIG. 2.3 – Schéma des deux premiers cycles d'un algorithme parallèle noir/blanc tri-grilles de type pseudo-FMG FAS. Cercles vides : lisseur sans correction FAS de grille grossière ; cercles pleins : lisseur avec correction FAS de grille grossière. Les calculs sur les grilles  $M_0$  et  $M_2$  s'exécutent en parallèle.

Schématiquement, on regroupe les différentes grilles en deux groupes travaillant successivement, cf. Fig. 2.3. Le groupe contenant  $\Omega_{l_{max}}$  commence en premier et aucune correction FAS de grille grossière  $S_{l+1}^l$ , cf. Eq. (2.4), n'est appliquée aux EDP durant le premier cycle multi-grilles. Par contre, tous les lissages sur les grilles d'un même groupe sont effectués en parallèle. Ce regroupement est basé sur la numérotation des grilles. Pour une grille dans un groupe donné, la grille immédiatement plus fine et celle immédiatement plus grossière sont placées dans l'autre groupe. En conséquence de quoi, on a un mixage entre un algorithme purement séquentiel – tous les lissages sont réalisés successivement, une grille après l'autre, les calculs sur une grille pouvant être parallèles ; parallélisation intra-niveaux – et un algorithme purement parallèle – tous les lissages sont réalisés en même temps ; parallélisation inter-niveaux. On s'attend donc à une convergence intermédiaire entre celles de ces deux algorithmes. L'analyse du comportement de cet algorithme multi-grilles parallèle est réalisé en Annexe A.7.

<sup>3</sup>Une valeur typique pour une simulation industrielle de GV est le l'ordre de  $5 \cdot 10^{-3}$ .

## 2.3 APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR

Contrairement à d'autres domaines de la simulation numérique, l'utilisation de méthodes bi-grilles ou multi-grilles non linéaires est assez novatrice dans le monde du calcul industriel des composants nucléaires. Les simulations reportées ici concernent les approches bi-grilles (cf. Figure 2.4) séquentielles et multi-grilles parallèles en damiers ; la résolution étant faite en commençant par la grille la plus grossière. Dans la pratique, en multi-grilles parallèle, nous utilisons au plus trois grilles emboîtées.

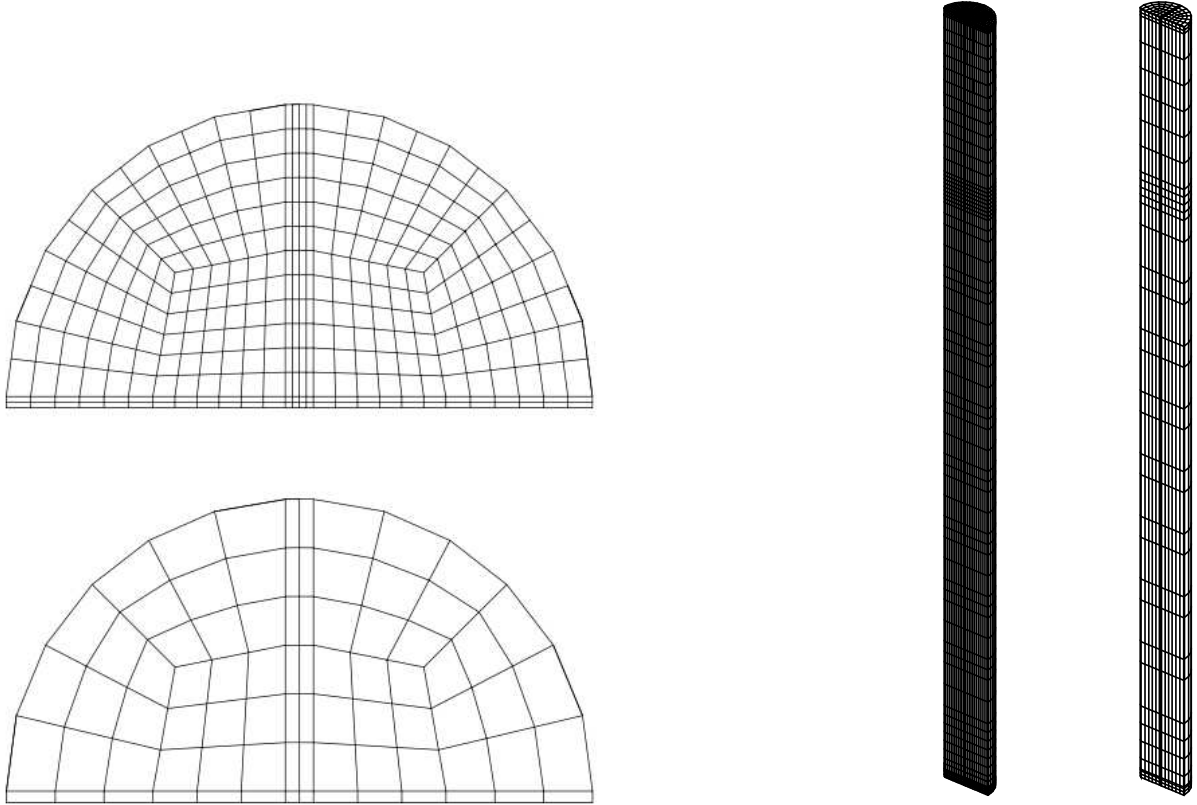


FIG. 2.4 – Méthode bi-grilles : maillages emboîtés pour la méthode FAS. Vue 3D et coupe horizontale du maillage grossier et du maillage fin du domaine de calcul.

Une présentation complète des performances de l'algorithme multi-grilles est faite dans la publication Belliard (2006). On ne retient ici que les aspects les plus saillants. Le cas test d'intérêt est celui de la maquette Clotaire déjà décrite à la Section 1.3. Sauf indication contraire, on utilise le jeu de paramètres suivants :

- $\epsilon_{st} = 10^{-3}s^{-1}$  ou  $10^{-4}s^{-1}$ , cf. Eq. (A.3),
- $cp_0 = 15$ ,  $cp_1 = 60$  et  $cp_2 = 120$ ,
- $\alpha = 0.7$ , cf. Eq. (2.11),
- $\epsilon_1^{MG} = 10^{-3}$  et  $\epsilon_2^{MG} = 10^{-3}$ , cf. Eq. (2.20).

### 2.3.1 Cycle dynamique et convergence

La Figure 2.5 permet de juger de l'intérêt de la gestion dynamique du cycle multi-grilles. Elle montre l'évolution typique du résidu du bilan d'enthalpie sur  $\Omega_0$  lors d'un cycle bi-grilles FAS statique ou dynamique. On y a également porté la valeur de la norme  $L^2$  de l'erreur  $e_0$  permettant de corriger l'enthalpie  $H_0$ .



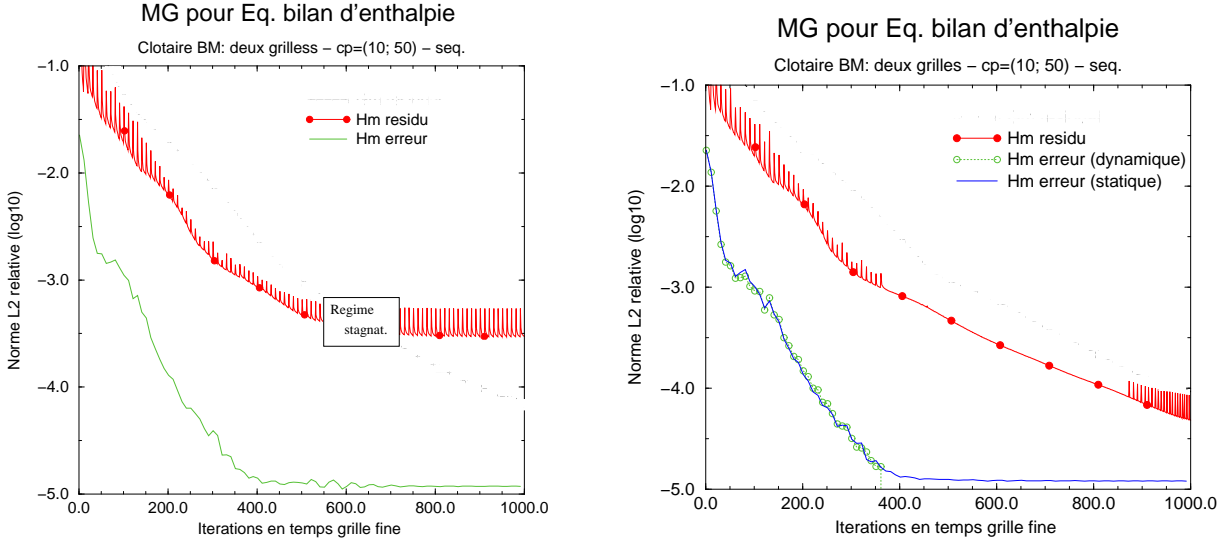


FIG. 2.5 – Méthode bi-grilles Pseudo-FMG FAS : évolution du résidu du bilan d'enthalpie et de l'erreur sur  $\Omega_0$ . Gauche : cycle statique. Droite : cycle dynamique. Simulation de la maquette Clotaire ; 22 400 cellules.  $cp_0 = 10$  et  $cp_1 = 50$ .

Après 40 cycles bi-grilles statiques ( $\equiv 400$  itérations en temps), l'erreur relative atteint un seuil de  $10^{-5}$  et ne diminue plus. Avec un cycle bi-grilles dynamique, le critère Eq. (2.20) est vérifié après 37 cycles et la correction FAS n'est plus appliquée. On obtient alors la convergence du calcul et le régime stationnaire.

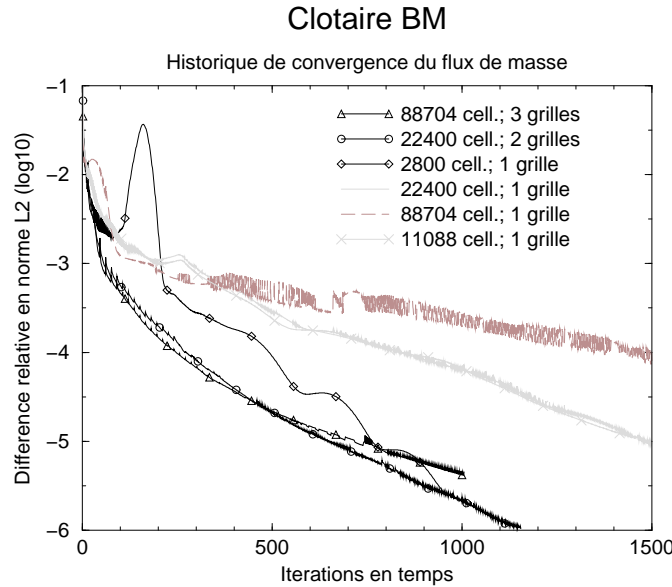


FIG. 2.6 – Simulation d'un générateur de vapeur par la méthode multi-grilles FAS avec 1, 2 ou 3 grilles de calcul. Historique de la différence relative en norme L2 de l'enthalpie entre deux pas de temps en fonction du nombre de pas de temps.

Par ailleurs, comme illustré sur la Figure 2.6, la convergence des calculs ne dépend pas du nombre d'inconnues (*scalabilité* de la méthode). Ici, les grilles comportent 2 800, 22 400 et 88 704 cellules : soit un rapport consécutif de 8. Diviser le pas d'espace par 2 conduit à doubler le nombre de cellules dans la direction générale de l'écoulement. Comme la CFL est maintenue constante et que le temps d'advection de l'information dans le GV ne change pas,

la convergence d'un calcul standard vers le stationnaire est deux fois plus lente. A l'opposé, les simulations multi-grilles convergent de façon très proche, indépendamment du nombre de cellules. La convergence vers le régime stationnaire est même plus rapide que dans le cas d'une unique grille grossière à 2 800 cellules.

### 2.3.2 Parallélisme

Les tests numériques mettent en évidence une excellente efficacité en terme de réduction du temps CPU des calculs. Cela est particulièrement vrai pour un grand nombre d'éléments finis (ici 88 704 éléments). En séquentiel, la méthode bi-grilles permet de diviser celui-ci par 2,5 par rapport au calcul sur une grille. De même sur trois grilles et en parallèle, le temps CPU est divisé par 3,1 ; cf. Table 2.1.

	Standard $\Omega_0$	Bi-grilles seq. $\Omega_1$ $\Omega_0$		Tri-grilles // en damier $\Omega_2$ $\Omega_1$ $\Omega_0$		
Itérations en temps	3 887	2 435	1 170	2 202	1 773	1 005
Temps CPU (s)	29 331	2 340	9 199	510	1 752	7 800
incluant :						
Init. du couplage		176	176	4	179	176
Couplage des CLs		191	413	112	186	347
Mémoire (MO)	696	76	710	10	76	710
Speed-Up (temps CPU)		2,5		3,1		
Speed-Up (itér. en temps)		2,7		3,1		

TAB. 2.1 – Simulations pseudo-FMG FAS, séquentielles bi-grilles et parallèles en damier tri-grilles, de la maquette Clotaire ; 88 704 cellules. Une tâche informatique par Génèpi. Une itération en temps de  $\Omega_0 \approx 8,4$  itérations en temps de  $\Omega_1$  et  $\approx 41,2$  itérations en temps de  $\Omega_2$ .

### 2.3.3 Sensibilité de l'algorithme aux paramètres de calcul

Il est bien connu qu'une des difficultés des méthodes multi-grilles concerne l'optimisation des paramètres de celles-ci : choix du lisseur, nombre d'itérations de lissage, type de cycle, ... J'illustre cela en présentant en Annexe A.8 la sensibilité de l'algorithme bi-grilles à deux paramètres clefs : le coefficient de relaxation  $\alpha_0$  et le nombre d'itérations de lissage  $cp_0/cp_1$ .

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Une méthode originale multi-grilles de type pseudo-FMG FAS a été mise en place et testée avec succès dans le code diphasique Génèpi du CEA. Elle est basée sur un algorithme séquentiel bi-grilles et généralisée à un algorithme parallèle multi-grilles par une approche en damier. Deux groupes de couleur sont définis de telle façon que deux grilles consécutives exécutent l'algorithme bi-grilles de façon séquentielle. Le lissage des EDP non linéaires est réalisé par des itérations de Picard relaxées (i.e. les itérations en temps de Génèpi). Dans le cas de la simulations de la maquette Clotaire, l'algorithme est particulièrement efficace lorsque le nombre de degrés de liberté devient grand : ici, de l'ordre de  $10^5$ . Dans mes tests numériques, la convergence de la méthode est quasiment indépendante du nombre de cellules, pourvu que le nombre de grilles d'agglomération soit pris en conséquence<sup>4</sup>. La réduction

<sup>4</sup>Par exemple, 1 grille pour 2 800, 2 grilles pour 22 400 et 3 grilles pour 179 200 cellules.

sensible du nombre d'itérations en temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire permet d'accélérer fortement les simulations, que se soit en séquentiel ou en parallèle. Ici les *speed-up* obtenus sont d'environ 2,5 pour un calcul bi-grilles séquentiel et 3,1 pour un calcul tri-grilles parallèle, que ce soit en terme d'itérations ou de temps CPU.

A noter que dans Belliard (2006), j'ai également réalisé des tests, toujours dans le contexte de l'évaporateur d'un GV, mais sans internes (faisceau et plaques) et en hydraulique pure. Dans ces conditions plus académiques et favorables, car sans écarts de modélisation entre les grilles  $\Omega_l$ ,  $0 \leq l \leq l_{max}$ , les performances sont encore bien meilleures. Le *speed-up* en terme de temps CPU est de l'ordre de 4 pour la méthode bi-grilles séquentielle sur un maillage à seulement 22 400 cellules.

Afin de tirer le meilleur parti de ma méthode multi-grilles non linéaire dans mon domaine de simulation, il est important de respecter certains points.

- Les équations de bilan étant fortement non linéaires, les termes correctifs Eqs (2.12)-(2.14) doivent tenir compte de cet aspect. Les coefficients des EDP dépendant des variables, ils doivent être recalculés en fonction des variables restreintes. En particulier, cela nécessite de restreindre également la température primaire dont l'EDP associée n'est pas directement impliquée dans l'algorithme multi-grilles.
- La relaxation des corrections de grilles fines est essentielle pour l'obtention de la convergence de l'algorithme.
- De part les écarts de modélisations entre les grilles introduits par l'approche géométrique, la définition d'un cycle multi-grilles dynamique est également une nécessité pour que l'algorithme converge.
- Pour les mêmes raisons que ci-dessus – écarts de modélisations et non linéarités – la recherche du régime stationnaire sur la grille la plus grossière ( $\approx 1\ 000$  itérations en temps) avant d'enclencher les cycles multi-grilles n'est pas souhaitable, car non optimale en temps de calcul. En effet, il est plus intéressant de se contenter d'une première estimation grossière ( $\approx 120$  itérations en temps) avant de commencer les cycles multi-grilles.
- Enfin, l'optimisation du calcul passe par celle des paramètres numériques de l'algorithme. A ce jour, seules des études paramétriques permettent de la réaliser. Pour nous, cela se traduit par un paramètre de relaxation de 0,7 ainsi que par un critère de cycle dynamique  $\epsilon_1^{MG} = \epsilon_2^{MG} = 10^{-3}$  et un triplé de nombres d'itérations de lissage de ( $cp_0 = 15$ ,  $cp_1 = 60$ ,  $cp_2 = 120$ ).

Parmi les perspectives d'améliorations, on peut citer l'utilisation de techniques de décomposition de domaine, cf. Chapitre 1, permettant d'accélérer la résolution sur chaque grille. De même, la prise en compte de la présence des internes (faisceau de tubes et plaques) sur les grilles  $\Omega_l$ ,  $0 < l \leq l_{max}$  pourrait découler de la restriction des quantités calculées sur  $\Omega_0$  au lieu d'être recalculer sur chaque grille.

Ici encore, je dois souligner l'intérêt du coupleur de code du CEA (Isas) qui a grandement facilité la mise en œuvre de l'algorithme pseudo-FMG FAS présenté ici.

# RAFFINEMENT LOCAL MULTI-NIVEAUX

## SOMMAIRE

3.1	CONTEXTE . . . . .	45
3.1.1	Enjeux et motivations . . . . .	45
3.1.2	Objectifs et approche générale . . . . .	45
3.2	MÉTHODES DE RAFFINEMENT LOCAL MULTI-NIVEAUX . . . . .	46
3.2.1	Introduction . . . . .	46
3.2.2	Pistes de recherche et cadre logiciel . . . . .	46
3.2.3	Correction locale du résidu (méthode LDC) . . . . .	48
3.2.4	Correction de flux à l'interface (méthode FIC) . . . . .	50
3.3	APPLICATIONS EN THERMIQUE ET AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR . . . . .	53
3.3.1	Applications en thermique . . . . .	53
3.3.2	Applications au générateur de vapeur . . . . .	54
	CONCLUSION . . . . .	59

DANS ce chapitre, on considère des méthodes permettant à l'ingénieur d'avoir une discrétisation spatiale détaillée dans une région du domaine de calcul qui l'intéresse particulièrement : comportement du fluide au voisinage des plaques de supportage, zone du *chignon* du faisceau tubulaire, ... Le reste du domaine de calcul conserve une discrétisation spatiale plus lâche. Pour cela, on s'intéresse ici aux méthodes de raffinement local multi-niveaux de type LDC ou FIC. Le principe directeur repose sur l'ajout au domaine de calcul complet de *patches* dans les zones d'intérêt. Ces patches correspondent à des petits domaines de calcul supplémentaires, couplés avec le domaine principal, mais avec un raffinement spatial plus important. Après avoir donné des éléments théoriques concernant ce type de méthode, le reste de ce chapitre est consacré à la mise en œuvre de ces méthodes sur des problèmes de thermique ainsi que sur les équations de bilan du générateur de vapeur.



### 3.1 CONTEXTE

L'étude des composants nucléaires nécessite parfois de s'intéresser plus particulièrement à des régions de l'évaporateur ou du cœur présentant des risques du point de vue de la sûreté (sur-vitesses locales, fissuration de la gaine, ...) ou des enjeux économiques (échange thermique, encrassement, ...). La connaissance fine de l'écoulement diphasique dans ces zones permet de concevoir une technologie optimale ou de statuer sur des risques éventuels en vue de rapports de sûreté.

#### 3.1.1 Enjeux et motivations

Concernant les simulations numériques, il est important de pouvoir faire des calculs avec une précision accrue dans ces régions d'intérêt. Pour augmenter celle-ci, il existe deux approches différentes. La première est la montée en ordre des éléments de l'espace vectoriel dans lequel est recherchée la solution : par exemple, éléments Q2 au lieu de Q1 en Éléments Finis, EF, ou schéma MUSCL en Volumes Finis, VF. La seconde approche consiste à réduire le pas d'espace, sans changer l'ordre de la méthode. Dans notre cas, le pas du maillage est idéalement de l'ordre du pas du faisceau ou de la dimension des détails technologiques étudiés. Dans les deux cas, conserver une forte discrétisation spatiale ou des fonctions d'ordre élevé de partout dans le composant est actuellement trop coûteux et pas forcément utile. On peut donc se contenter de raffiner le maillage ou de monter en ordre uniquement localement. Les techniques numériques envisagées dans ce but doivent toutefois se plier à certaines contraintes, en particulier : être compatibles avec les discrétisations spatio-temporelles utilisées dans les logiciels industriels (essentiellement EF et VF) et être le moins intrusives possible. Par exemple, en ce qui concerne la compatibilité, la modélisation d'un obstacle est telle dans Génepi qu'elle conduit à répartir son impact dans tout l'élément l'interceptant. De fait, monter en ordre ne permet pas de mieux prendre en compte la géométrie des internes et leur modélisation physique. Le raffinement local de maillage est donc préférable dans ce cas.

#### 3.1.2 Objectifs et approche générale

L'objectif est donc de réaliser localement un raffinement de maillage permettant de mieux prendre en compte la géométrie des internes et leur modélisation physique, ainsi que de réduire le niveau d'erreur des simulations, sans toutefois changer l'ordre de discrétisation de la méthode numérique. On se situe donc dans le cadre plus général des méthodes de raffinement adaptatif de maillage, *Adaptive Mesh Refinement*, AMR, même si ici les zones à raffiner sont connues à l'avance.

Pour cela, on peut envisager plusieurs techniques. Par exemple, on peut déplacer les points du maillage tout en gardant leur nombre constant. Mais si certaines zones du maillage deviennent plus denses, d'autres peuvent être sous résolues en espace. L'ajout de mailles est donc à privilégier. Le raffinement direct des mailles existantes dans les zones d'intérêt conduit à un maillage non conforme, induisant une éventuelle modification du schéma numérique du logiciel de base (schéma composite). Si l'on veut conserver un maillage conforme, cas de Génepi par exemple, on ne peut directement subdiviser les cellules et on doit recourir à l'intervention d'un mailleur pour réaliser cet enrichissement progressivement. De plus, si le raffinement conduit à augmenter fortement le contraste de dimension des mailles, rapport de la plus grande taille de maille sur la plus petite, cela peut avoir un effet négatif sur le conditionnement des opérateurs intervenants dans les bilans.

Les techniques de type *patch* allient les avantages des deux types de raffinement (direct ou progressif). Les zones à raffiner génèrent des domaines de calcul supplémentaires appelés patches, sans modifier le domaine de calcul principal. La taille des mailles de ces patches est plus petite que celle du domaine principal et peut être uniforme par patch. De fait, les éventuels

problèmes de fort contraste de dimension de maille sont évités. De même, la discrétisation globale (domaine principal plus patches) est non conforme, mais cela ne nécessite pas de modification du schéma numérique du code de base. Par contre, un processus itératif permet de coupler les différents domaines de calcul entre eux, dont le domaine principal. Les différentes méthodes de patches correspondent à différentes techniques de couplage. Certaines, comme la méthode FIC, entretient des liens forts avec la décomposition de domaine, cf. Chapitre 1, et d'autres, comme LDC, avec les méthodes multi-grilles, cf. Chapitre 2.

## 3.2 MÉTHODES DE RAFFINEMENT LOCAL MULTI-NIVEAUX

**[•] Méthodes de raffinement local multi-niveaux de maillage, de types LDC et FIC, en parallèle ou séquentiel et avec des maillages non-conformes.**

Avec M. Grandotto et I. Ramière (PhD) du CEA Cadarache  
 Interactions : Ph. Angot d'Aix-Marseille Université  
 Publications associées : Belliard et Grandotto (2002), Belliard et Grandotto (2003a), Ramière et al. (2007a) et Ramière et al. (2007b)  
 Conférences associées : Belliard et Grandotto (2000), Ramière et al. (2005a), Ramière et al. (2005b) et Belliard (2009)

### 3.2.1 Introduction

Nous voulons réaliser le calcul de sous-domaines avec des maillages fins, les conditions limites étant fournies par le domaine principal. Contrairement à un simple chaînage de calculs<sup>1</sup>, le but est d'utiliser l'information *haute résolution* en provenance des sous-domaines pour corriger la simulation numérique *basse résolution* du domaine principal dans son ensemble. Pour ce faire, nous utilisons des maillages localement hiérarchiques (de type multi-grilles local) et des méthodes de correction adaptées à la discrétisation spatiale considérée.

### 3.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel

Un algorithme multi-niveaux ou multi-grilles (Hackbusch 1985) est un algorithme récursif basé sur des maillages localement emboîtés  $\Omega_l$ ,  $0 \leq l \leq l_{max}$ , cf. Figs 3.1 et 3.2. Il combine récursivement une méthode bi-grilles locale. L'EDP considérée est résolue sur chaque grille. Celle de la grille grossière  $\Omega_0$  est localement corrigée à partir de l'approximation plus précise obtenue sur la grille fine  $\Omega_1$  : correction via la troncature des opérateurs comme pour la méthode *Local Defect Correction*, LDC, de Hackbusch ou via le bilan des flux comme pour la méthode *Flux Interface Correction*, FIC, de Angot et al.. La mise en œuvre de cette correction pourrait se faire en une seule fois (approche composite). Mais cela nécessiterait de modifier de façon importante le solveur du logiciel. Pour des raisons évidentes de flexibilité, on privilégie une approche itérative de type V-cycles<sup>2</sup> par exemple, cf. Fig. 2.1.

Comme au Chapitre 2.2.1, considérons chacune des équations de bilan dans leur version stationnaire sous la forme générale d'un résidu non linéaire  $r(s) = -T(s) = 0$ ,  $s \in V(\Omega)$ ,  $V(\Omega)$  espace vectoriel des solutions  $s$  sur  $\Omega$ . Notons  $\partial\Omega_l$  la frontière de  $\Omega_l$ ,  $0 \leq l \leq 1$ ,  $\Gamma_1$  la frontière interne de  $\Omega_1$ , cf Fig. 3.1 ou 3.2.

L'algorithme itératif à deux niveaux est défini comme suit. Soit  $k > 0$  le numéro d'itération,  $u_{\{0,1\}}^k$  les approximations à l'itération  $k$  et  $f_0^{k=1} = 0$ . Les étapes à l'itération  $k$  consistent en :

<sup>1</sup>Le calcul du domaine complet est suivi par des calculs de zoom, sans rétroaction sur le domaine complet.

<sup>2</sup>Je devrai plutôt parler de  $\Lambda$ -cycles car on commence l'algorithme par le maillage grossier.

- (i) la résolution ou le lissage de  $r_0(u_0^k) = -f_0^k$  sur  $\Omega_0$ ,
- (ii) l'interpolation (prolongement),  $P_1^0 u_0^k$ , des valeurs prises en CL sur  $\Gamma_1$ ,
- (iii) la résolution ou le lissage de  $r_1(u_1^k) = 0$  sur  $\Omega_1$ ,
- (iv) la restriction de  $u_1^k$ ,  $\bar{u}_0^k = R_0^1 u_1^k$ , et/ou de certains termes de flux sur la zone de raffinement spatial de  $\Omega_0$ ,
- (v) la définition de la prochaine correction locale  $f_0^{k+1}$  à partir de la restriction de  $u_1^k$  ou de termes de flux.

L'opérateur de prolongement  $P_1^0$  doit être cohérent avec l'ordre  $m$  du schéma numérique utilisé comme solveur. Ici, il s'agit d'interpolations trilineaires (solution en Q1). Par ailleurs, en cas d'utilisation sur le niveau de raffinement de plusieurs patches non disjoints, la convergence des V-cycles peut être améliorée en mettant en œuvre une Méthode de Décomposition de Domaine, DDM (Ramière et al. 2007b). Une méthode multi-niveaux résulte de l'appel récursif de méthode à deux niveaux.

En généralisant les travaux en différences finies de Ferket et Reusken (1996), la méthode LDC bi-grilles, utilisant un même schéma numérique d'ordre  $m$  et un opérateur d'interpolation de degré  $p$ , conduit à une erreur globale composite en norme infinie de la forme :

$$|e|_\infty \leq C_0 h_0^m + C_1 h_1^m + C_p h_0^p \quad (3.1)$$

où  $h_i$ ,  $i = \{0;1\}$ , est le pas d'espace de la grille  $\Omega_i$ ,  $C_1 \gg C_0$  et  $C_1 \gg C_p$ . Les deux premiers termes du membre de droite correspondent aux erreurs de discrétisation spatiale, respectivement, hors et dans la région de raffinement. Le troisième terme est l'erreur liée au prolongement<sup>3</sup>. L'erreur de pollution est définie comme l'erreur de discrétisation  $C_0 h_0^m$ . Cette dernière peut être prépondérante si la zone de raffinement est trop petite vis-à-vis du domaine principal ou si le pas  $h_1$  devient trop petit.

L'algorithme à deux niveaux présenté ci-dessus est classiquement un algorithme séquentiel. Cependant, comme pour les méthodes multi-grilles non linéaires, cf. Chapitre 2, j'ai également considéré une version parallèle qui optimise le temps d'exécution, au détriment du nombre de V-cycles. Cela revient à introduire un déphasage des indices à l'étape (ii) pour la détermination des CL sur  $u_1^k$  :  $u_1^k = P_1^0 u_0^{k-1}$  et à l'étape (iv) pour la restriction :  $\bar{u}_0^k = R_0^1 u_1^{k-1}$  et aussi pour l'expression de  $f_0^{k+1}$  par voie de conséquence.

La méthode LDC a été introduite dans le logiciel Génépi en l'adaptant de façon à tenir compte des spécificités de l'algorithme de résolution du système d'équations Eqs (1)-(3) : fortes non linéarités, méthode de projection, .... D'un point de vue informatique, on utilise une fois encore les mêmes outils que pour les méthodes de décomposition de domaine ou multi-grilles, cf. Sections 1.2.2 et 2.2.2. On réalise un couplage itératif, en séquentiel ou en parallèle, entre le calcul du domaine principal et le ou les sous-domaine(s) raffiné(s) en espace (emboîté(s) les uns dans les autres). A chaque grille – i.e. le domaine principal et les sous-domaines raffinés –, on associe une tâche informatique Génépi. Une nouvelle *condition aux limites* en volume de type LDC est introduite ("correction volumique"). Elle génère des demandes de données externes aux sous-domaines raffinés afin de calculer la correction de résidu à appliquer sur cette portion volumique du domaine principal.

La méthode FIC s'applique naturellement à la discrétisation spatiale en VF puisqu'elle est formulée en terme de flux aux faces des volumes de contrôle. Elle a été introduite dans la maquette logicielle séquentielle *Fictitious* dédiée à la R&D dans le contexte des domaines fictifs, cf. Chapitre 4, afin de réaliser de l'AMR pour réduire l'erreur du schéma sans augmenter l'ordre de celui-ci.

<sup>3</sup>Dans leur démonstration, Ferket et Reusken ont utilisé une restriction canonique de  $\Omega_1$  sur  $\Omega_0$ . Dans le cas contraire ou pour la méthode FIC, on devrait rajouter un terme supplémentaire pour l'erreur liée à la restriction.



### 3.2.3 Correction locale du résidu (méthode LDC)

Je renvoie le lecteur intéressé par la méthode LDC à la publication originale Hackbusch (1984), ainsi qu'à Angot et al. (1993). Je ne présente ici que les idées de base de la méthode et mon adaptation originale aux équations de bilans diphasiques non linéaires Eqs (1)-(3), dans le cadre d'une méthode de projection. L'idée principale de la méthode LDC est de corriger localement une EDP discrétisée dans le domaine de calcul en utilisant une estimation de l'erreur de troncature des opérateurs associés. Pour cela, on a besoin d'une approximation locale précise de la solution, éventuellement obtenue par un autre schéma de calcul plus précis (méthode spectrale par exemple).

#### Principe

Après discrétisation spatiale par la méthode des EF, on a le terme  $r_0^i(s_0)$  suivant :

$$r_0^i(s_0) = - \int T_0(s_0) \varphi_0^i(x) dx = 0, \forall \varphi_0^i \in V_0(\Omega_0) \quad + CL \quad (3.2)$$

où  $T_0$  est l'opérateur associé à l'EDP considérée discrétisée sur la grille (principale) de calcul  $\Omega_0$ ,  $s_0 \in V_0(\Omega_0)$  est la solution dans l'espace vectoriel des solutions discrètes sur  $\Omega_0$  et  $\varphi_0^i$  une fonction de base EF au nœud  $i$ . La troncature associée à  $\int T_0(\cdot) \varphi_0^i(x) dx$  est définie par  $T_0 = \int T_0(s) \varphi_0^i(x) dx$ , où  $s$  est la solution de l'EDP continue. L'équation corrigée est alors :

$$r_0^i(\check{s}_0) = - \int T_0(\check{s}_0) \varphi_0^i(x) dx = -T_0, \forall \varphi_0^i \in V_0(\Omega_0) \quad + CL \quad (3.3)$$

où  $\check{s}_0$  est la solution de l'équation corrigée. De même, considérons une autre grille de calcul  $\Omega_1$ , emboîtée dans  $\Omega_0$  de manière hiérarchique, relative à un sous-domaine de raffinement, avec un *petit pas d'espace* et dont l'opérateur associé est  $T_1$ . Si on appelle  $s_1$  la solution discrète de  $r_1(s_1) = 0$  obtenue sur  $\Omega_1$  avec les CL exactes sur  $\partial\Omega_1$ , la troncature de  $\int T_0(\cdot) \varphi_0^i(x) dx$  peut être approchée localement par :  $T_0 \approx \int T_0(\bar{s}_0) \varphi_0^i(x) dx$  où  $\bar{s}_0$  est la restriction de  $s_1$  sur  $\Omega_0$  :

$$r_0^i(\check{s}_0) \approx -\chi \int T_0(\bar{s}_0) \varphi_0^i(x) dx, \forall \varphi_0^i \in V_0(\Omega_0) \quad + CL \quad (3.4)$$

avec  $\chi$  fonction caractéristique de la région de raffinement spatial. On a donc une correction locale du résidu.

#### Mise en œuvre

Notons  $A_0$  l'ensemble des nœuds de  $\Omega_0$  strictement inclus ( $\notin \Gamma_1$ ) dans la région de raffinement et  $\dot{A}_0$  celui des nœuds de  $A_0$  qui n'ont pas de nœud de  $\Gamma_1$  comme voisin, cf Fig. 3.1.

L'algorithme itératif LDC est donné à la Section 3.2.2. Les spécificités sont :

- étape (iv), la restriction de  $u_1^k$ ,  $\bar{u}_0^k = R_0^1 u_1^k$ , sur les nœuds de  $A_0$ ,
- étape (v), la correction  $f_0^{i,k+1} = \chi_{\dot{A}_0} \int T_0(\bar{u}_0^k) \varphi_0^i(x) dx$ .

Ici  $\chi_{\dot{A}_0}$  est la fonction caractéristique de  $\dot{A}_0$ .

Dans le cas d'une résolution – et non d'un lissage – sur  $\Omega_1$  et avec des CL exactes sur  $\partial\Omega_1$ , on peut voir l'étape (i) comme une étape de correction locale bi-grilles de type FAS sur la grille grossière  $\Omega_0$ , cf. Eqs (2.4) et (2.6), à partir des restrictions de la solution  $u_1^k = s_1$  et du résidu  $r_1(u_1^k) = 0$  de la grille fine  $\Omega_1$ .<sup>4</sup>

L'adaptation originale de cet algorithme à la simulation des composants nucléaires est la suivante.

<sup>4</sup>Attention, traditionnellement, les indices de la grille fine et de la grille grossière sont inversés en bi-grilles (CS et FAS) et en LDC.

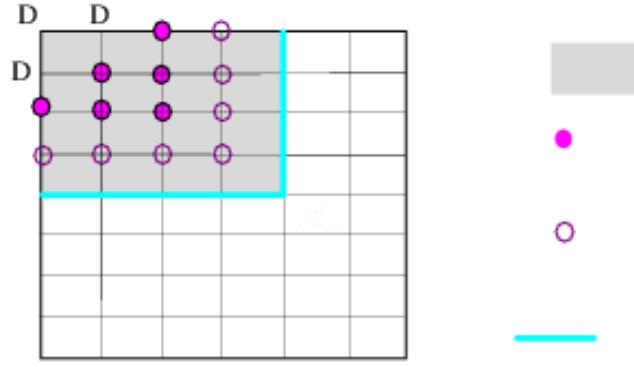


FIG. 3.1 – Schéma de principe 2D pour la méthode LDC. La grille  $\Omega_0$  du domaine de calcul principal est en blanc (partiellement recouverte de gris dans la zone de raffinement spatial). La grille  $\Omega_1$ , non représentée, recouvre la zone de raffinement. La frontière interne  $\Gamma_1$  est en bleu. Les nœuds de  $A_0$  sont représentés par des ronds vides ou pleins (nœuds de  $\hat{A}_0$ ). Les symboles  $D$  indiquent des emplacements de CL de type Dirichlet.

- On ajoute des corrections LDC aux seconds membres des bilans de quantité de mouvement, QDM, et d'enthalpie. Mais pas à celui de l'énergie primaire, ni à l'équation de projection. De fait, l'ajout d'une correction constante au bilan de la QDM, n'induit pas de modification du schéma de projection.
- On tient compte au mieux des non linéarités intervenants dans ces corrections, fonctions de  $(\mathbf{G}, P)$  et de  $(H, Q)$ . La restriction du terme d'échange de chaleur entre le primaire et le secondaire remédie en partie à la non correction LDC du bilan d'énergie primaire.
- On ne résout pas, mais on lisse l'EDP sur la grille  $\Omega_1$ . Comme en bi-grilles, la résolution complète à chaque itération de l'algorithme est inutile car, en particulier, les valeurs en CL ne sont pas convergées. Le lissage est réalisé par l'application de quelques itérations de Picard relaxés (schéma en temps de Génèpi).
- La détermination du type et des valeurs des CL prises sur  $\Gamma_1$  est faite par la méthode ADN, cf Chapitre 1.2.3 (présence éventuelle de vortex).

### Restrictions pour la correction du résidu

Pour les restrictions  $\bar{u}_0 = R_0^1 u_1$  des variables nodales  $\mathbf{G}$  et  $H$ , on utilise de façon naturelle la restriction canonique Eq. (2.16). Pour les quantités par élément  $P$  et  $Q$ , on utilise la restriction pondérée par les volumes Eq. (2.17).

### Termes de correction des bilans

La formulation EF de la correction LDC pour le bilan d'enthalpie s'écrit – on omet l'exposant  $k$  pour plus de concision – :

$$\begin{aligned} \int T_0(\bar{u}_0) \varphi_0^i(x) dx &\equiv \int [\beta_0(\bar{\mathbf{G}}_0 \cdot \nabla) \bar{H}_0 + (\nabla \cdot (\beta_0 \bar{x}(1 - \bar{x}) \bar{\rho} \bar{L} \bar{\mathbf{v}}_R))] \varphi_0^i(x) dx \\ &\quad - \int \tau_0 \bar{Q}_0 \varphi_0^i(x) dx + \int [(\nabla \varphi_0^i) \cdot (\beta_0 \chi_{T_0} \nabla \bar{H}_0)] dx + CL \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\bar{L}(\bar{P}_0)$  est la chaleur latente,  $\bar{x}(\bar{H}_0, \bar{P}_0)$  le titre statique,  $\bar{\rho}(\bar{H}_0, \bar{P}_0)$  la densité du mélange et  $\bar{\mathbf{v}}_R(\bar{H}_0, \bar{\mathbf{G}}_0, \bar{P}_0)$  la vitesse relative. CL incorpore le flux Neumann fonction de  $\bar{H}_0$ .

De même pour le bilan de QDM :

$$\begin{aligned} \int T_0(\bar{u}_0) \varphi_0^i(x) dx &\equiv \int \varphi^i [\beta_0(\bar{\mathbf{G}}_0 \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + (\nabla \cdot (\beta_0 \bar{x}(1 - \bar{x}) \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{R}} \otimes \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{R}})] dx \\ &\quad - \int \varphi^i [\beta_0 \bar{\rho} \mathbf{g} - \beta_0 \bar{\Lambda}_r \bar{\mathbf{G}}_0] dx - \int \nabla(\beta_0 \varphi^i) \bar{P}_0 dx \\ &\quad + \int \nabla \varphi^i [\beta_0 \mu_{T_0} (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla^t \bar{\mathbf{v}})] dx + CL \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $\bar{\Lambda}_r(\bar{H}_0, \bar{\mathbf{G}}_0, \bar{P}_0)$  est le tenseur de frottement diphasique sur les obstacles,  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{G}}_0 / \bar{\rho}$  et le terme CL inclut le flux Neumann fonction de  $\bar{\mathbf{v}}$  et  $\bar{P}_0$ .

Les manques vis-à-vis de la non linéarité de ces EDP sont dans l'usage de  $\chi_T$ , de  $\mu_T$  et de  $\bar{Q}_0$ .

### 3.2.4 Correction de flux à l'interface (méthode FIC)

Je renvoie le lecteur intéressé par la méthode FIC à la publication originale (Angot et al. 1992; 1993). Je ne présente ici que les idées de base de la méthode. Son principe repose sur la continuité au sens faible des flux à l'interface  $\Gamma_1$  entre deux grilles non conformes.<sup>5</sup>

Ma contribution principale (avec celle de mes collègues) concerne l'adaptation de cette approche pour une mise en œuvre dans le cadre du modèle de frontière immergée JEBC en domaine fictif décrit à la Section 4.2.3.

#### Principe

Partitionnons l'opérateur  $T_0(s_0)$  en un terme conservatif  $\nabla \cdot \mathcal{F}_0(s_0)$  et un terme non conservatif  $\mathcal{G}_0(s_0)$  :  $T_0(s_0) = \nabla \cdot \mathcal{F}_0(s_0) + \mathcal{G}_0(s_0) = 0$ . Après discrétisation spatiale par la méthode des VF, on a le terme  $r_{K,0}(s_0)$  suivant :

$$r_{K,0}(s_0) = \tilde{r}_{K,0}(s_0) - \int_K \mathcal{G}_0(s_0) dx = 0 \quad + CL \quad (3.7)$$

où  $\tilde{r}_{K,0}(s_0) = - \int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s_0) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx$  est le résidu partiel associé au flux,  $s_0 \in V_0(\Omega_0)$  la solution dans l'espace vectoriel des solutions discrètes sur la grille (principale) de calcul  $\Omega_0$  et  $K$  un volume fini de  $\Omega_0$ .

Ici encore, considérons la grille de raffinement  $\Omega_1$ , emboîtée dans  $\Omega_0$ , dont l'opérateur associé est  $T_1 = \nabla \cdot \mathcal{F}_1 + \mathcal{G}_1$  et la solution discrète  $s_1$  :  $r_1(s_1) = 0$  avec les CL exactes sur  $\partial\Omega_1$ . La méthode FIC consiste à corriger localement l'Eq. (3.7) par la différence des résidus de flux sur l'interface commune entre les grilles  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  :

$$r_{K,0}(\check{s}_0) = -\chi [\mathcal{IF}_{K,0} - \int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s_0) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx] = 0 \quad + CL \quad (3.8)$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique de la région de raffinement spatial et  $\mathcal{IF}_{K,0}$  la restriction de l'intégrale du flux  $\mathcal{F}_1(s_1)$  de  $\Omega_1$  sur  $\partial K$ . On note  $r_{K,0}(\mathcal{F})$  le résidu en flux :  $[\mathcal{IF}_{K,0} - \int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s_0) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx]$ .

**Remarque 3.1** De façon similaire à ce qui est fait pour la méthode LDC, on peut définir une troncature relative à  $T_0$  :  $\mathcal{T}_0 = \int_K (\nabla \cdot \mathcal{F}_0(s) + \mathcal{G}_0(s)) dx$ , ainsi qu'une équation localement corrigée :

$$r_{K,0}(\check{s}_0) = -\chi [\int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx + \int_K \mathcal{G}_0(s) dx] \quad + CL. \quad (3.9)$$

<sup>5</sup>Ce qui assure la conservativité des flux entre les grilles emboîtées.

En assimilant  $\mathcal{G}_0(s) \approx \mathcal{G}_0(s_0)$  et en tenant compte de l'Eq. (3.7), on a :

$$r_{K,0}(\check{s}_0) \approx -\chi \left[ \int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx - \int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s_0) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx \right] + CL. \quad (3.10)$$

On retrouve une équation similaire à Eq. (3.8) où  $\int_{\partial K} \mathcal{F}_0(s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K} dx$  remplace le flux restreint  $\mathcal{IF}_{K,0}$ . Par contre, il n'y a plus aucune assurance de la conservativité des flux entre les grilles emboîtées.

### Mise en œuvre

Notons  $A_0$  l'ensemble des volumes de contrôle de  $\Omega_0$  inclus dans la zone de raffinement, cf. Fig 3.2.

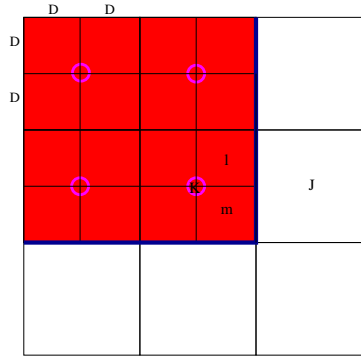


FIG. 3.2 – Schéma de principe 2D pour la méthode FIC. La grille  $\Omega_0$  du domaine de calcul principal est en blanc (partiellement recouverte de rouge dans la zone de raffinement spatial). La grille  $\Omega_1$  est en rouge. La frontière interne  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_0$  est en bleu. Les volumes finis de  $A_0$  sont représentés par des ronds vides (par exemple,  $K \in A_0$ ).  $l$  et  $m$  désignent des volumes de contrôle de  $\Omega_1$ . Les symboles  $D$  indiquent des emplacements de CL de type Dirichlet.

L'algorithme itératif FIC est donné à la Section 3.2.2. Les spécificités sont :

- étape (iv), on calcule la restriction de flux, cf. Eq. (3.11), sur l'ensemble des faces  $\partial K$  des volumes  $K \in A_0$ ,
- étape (v), la correction  $f_{K,0}^{k+1} = f_{K,0}^k + \chi_{A_0} r_{K,0}^{k+1}(\mathcal{F})$  où le résidu en flux  $r_{K,0}^{k+1}(\mathcal{F})$  utilise les évaluations de  $u_0$  et de  $u_1$  à l'itération  $k$ , cf. Eq. (3.12).

### Restrictions pour la correction du résidu

L'opérateur  $\mathcal{IF}_{K,0}$  de restriction de l'intégrale du flux sur le volume  $K$  de  $A_0$  s'écrit :

$$\mathcal{IF}_{K,0} = R_0^1(\mathcal{F}_1(u_1))(K) = \sum_{\{\sigma_1 \subset \partial K_1; K_1 \subset K\}} \int_{\sigma_1} \mathcal{F}_1(u_1) \cdot \mathbf{n}_{K_1, \sigma_1} \quad (3.11)$$

avec  $K_1$  volume de contrôle de  $\Omega_1$ . L'intégrale de flux  $\int_{\sigma_1} \mathcal{F}_1(u_1) \cdot \mathbf{n}_{K_1, \sigma_1}$  est numériquement approchée par  $\approx |\sigma_1| \mathcal{F}_1(u_1)(\mathbf{x}_{\sigma_1}) \cdot \mathbf{n}_{K_1, \sigma_1}$  avec  $|\sigma_1|$  et  $\mathbf{x}_{\sigma_1}$  la mesure et le barycentre de la face  $\sigma_1$  respectivement.

### Termes de correction des bilans

Le résidu local en flux  $r_{K,0}(\mathcal{F})$  associé au volume  $K \in A_0$  est défini par :

$$r_{K,0}(\mathcal{F}) = \left\{ R_0^1(\mathcal{F}_1(u_1))(K) - \sum_{\sigma \subset \partial K} \int_{\sigma} \mathcal{F}_0(u_0) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \right\}. \quad (3.12)$$

### Adaptation pour la méthode FIC-EBC

L'algorithme d'origine de Angot et al. (1992) s'applique à des maillages emboîtés définis dans les limites des frontières du domaine réel de calcul. Dans le cadre des méthodes de domaines fictifs, le domaine de calcul (fictif) englobe le domaine réel et la frontière de ce dernier est alors immergée dans le domaine de calcul. Suivant la modélisation numérique de celle-ci, il peut exister des discontinuités à sa traversée, ce qui impacte l'application directe de l'algorithme FIC.

L'adaptation originale de cet algorithme au contexte des domaines fictifs FIC-JEBC (Ramière et al. 2007b) concerne essentiellement les opérateurs de prolongation  $P_1^0$  et de restriction  $R_0^1$ . La difficulté principale est que la position de la frontière discrétisée délimitant le domaine réel peut varier en fonction du niveau de la grille de raffinement considérée, cf. Fig. 3.3 dans le cas d'une approximation par excès de la frontière.

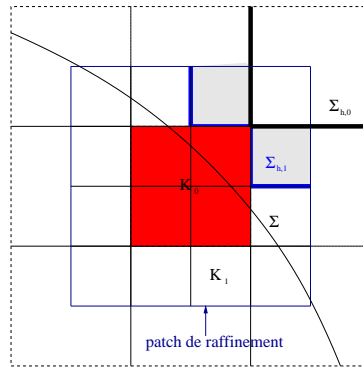


FIG. 3.3 – Méthode FIC et domaine fictif : grilles de calcul du domaine principal  $\Omega_0$  et du domaine de raffinement  $\Omega_1$  (patch). La zone rouge correspond à un volume de contrôle  $K_0$  de  $\Omega_0$  à raffiner et  $K_1$  est un volume de cette grille de raffinement.  $\Sigma$ ,  $\Sigma_{h,0}$  et  $\Sigma_{h,1}$  sont, respectivement, la frontière immergée et ses approximations discrètes vues dans  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . Elles séparent le domaine réel ou interne (en bas à gauche) du domaine extérieur (en haut à droite). Les deux zones grisées correspondent à des volumes du domaine externe de  $\Omega_1$  inclus dans le domaine réel de  $\Omega_0$ .

**Prolongation** Des faces  $\sigma_1$  de  $\partial\Omega_1$  peuvent être situées hors du domaine réel. Il est nécessaire d'en tenir compte pour la définition de l'opérateur de prolongement car la méthode JEBC permet des sauts de solutions aux faces des volumes de contrôle. Pour cela, on a modifié la méthode initiale afin d'utiliser l'information de  $\Omega_0$ ,  $\{u_{K_0}\}$  au centre des cellules  $K_0$  et sur les faces  $\{u_{\{K_0,\sigma\}}\}$ , provenant exclusivement du même côté (domaine réel ou externe) de la frontière immergée discrète vue sur  $\Omega_0$ .

**Restriction** L'opérateur de restriction donné par Eq. (3.11) doit être modifié car la définition à chaque niveau de la frontière immergée discrète peut conduire à des cellules de contrôle du domaine externe de  $\Omega_1$  incluses dans le domaine réel de  $\Omega_0$ , cf. Fig. 3.3. Comme on désire coupler les seuls domaines réels, on évalue le résidu de flux et on corrige l'EDP pour les seules faces des volumes de  $A_0$  incluses dans le domaine réel de  $\Omega_0$  (noté  $\tilde{\Omega}_0$ ) :  $(\mathcal{E}_{ref})_0 = \{\sigma \in \partial K \setminus (\Sigma_{h,0} \cup \partial\Omega_0); K \in A_0; \sigma \subset \tilde{\Omega}_0\}$ . On a :

$$r_{K,0}(\mathcal{F}) = \left\{ R_0^1(\mathcal{F}_1(u_1))(K) - \sum_{\substack{\{\sigma \subset \partial K; \\ \sigma \in (\mathcal{E}_{ref})_0\}}} \int_{\sigma} \mathcal{F}_0(u_0) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \right\} \quad (3.13)$$

et

$$\mathcal{IF}_{K,0} = R_0^1(\mathcal{F}_1(u_1))(K) = \sum_{\substack{\{\sigma_1 \subset \partial K_1; K_1 \subset K \\ \sigma_1 \in (\mathcal{E}_{ref})_1 \\ \sigma_1 \subset \sigma_0 \in (\mathcal{E}_{ref})_0\}}} \int_{\sigma_1} \mathcal{F}_1(u_1) \cdot \mathbf{n}_{K_1, \sigma_1}. \quad (3.14)$$

**Décomposition de domaine** Dans le cadre d'une méthode de domaine fictif et du raffinement local autour de la frontière immergée, notre choix a été de générer un patch  $\Omega_{l+1}$  pour chaque cellule de  $\Omega_l$ ,  $0 \leq l < l_{max}$ , coupée par la frontière approchée. Les patches  $\Omega_{l+1}$  ne se voyant que par la grille  $\Omega_l$ , la convergence de l'algorithme peut être lente. Afin de pallier à cet inconvénient, nous avons introduit une méthode de décomposition de domaine sur chaque niveau. Quelques itérations de Schwarz (additif) à la descente et à la remontée suffisent à accélérer la convergence des calculs.

### 3.3 APPLICATIONS EN THERMIQUE ET AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR

Si la zone de raffinement n'est pas trop petite vis-à-vis du domaine principal  $\Omega_0$  (erreur dite de pollution), ces méthodes de raffinement multi-niveaux permettent en théorie d'atteindre l'erreur optimale en norme  $L^2(\Omega_0)$  ou  $L_\infty(\Omega_0)$  :  $\mathcal{O}(h_{l_{max}}^m)$  où  $h_{l_{max}}$  est le pas d'espace de la grille la plus fine et  $m$  l'ordre du schéma numérique utilisé. C'est ce qui est illustré ici sur un cas test académique, avant de présenter l'application de la méthode LDC au générateur de vapeur.

#### 3.3.1 Applications en thermique

Des expériences numériques de raffinement local de maillage par les méthodes LDC et FIC ont été conduites dans le cadre de la résolution d'une EDP stationnaire de type diffusion-convection-réaction en domaine fictif. Je n'illustre ici que les résultats obtenus pour la méthode originale FIC-EBC dans le cadre de conditions aux limites de type Robin :  $-(D\nabla T) \cdot \mathbf{n} = \alpha_R T + g_R$ , avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure et  $D$ ,  $\alpha_R$  et  $g_R \in \mathbb{R}$ . Pour plus de résultats numériques, on peut se reporter à Ramière et al. (2007a;b).

Considérons le problème 2D de type Robin suivant (cf. Fig. 3.4 à gauche, pour la géométrie) :

$$\begin{cases} -\Delta T + \nabla \cdot (\mathbf{v}T) = 16r^2 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ -\frac{\partial T}{\partial n} = T + 3 & \text{sur } \Sigma \ (\alpha_R = 1, g_R = 3), \end{cases}$$

avec  $\mathbf{v} = 2r^3 \mathbf{e}_r$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur radial unité. La solution analytique est  $T = 2 - \frac{5}{3} \exp(\frac{r^4 - 1}{2})$  in  $\Omega$ .

Ce problème est résolu en utilisant la méthode de domaine fictif JEBC qui est à l'ordre un, la méthode FIC, ainsi qu'un ensemble de patches de raffinement emboîtés autour de  $\Sigma$ . L'erreur optimale attendue est alors en  $\mathcal{O}(h_{l_{max}}^1)$ . Le raffinement local est tel qu'on considère trois niveaux de raffinement au maximum et que  $h_{l+1} = \frac{h_l}{2}$  dans chaque direction. Les V-cycles (en séquentiel) sont arrêtés lorsque  $\frac{|T_0^{k+1} - T_0^k|_{L2}}{|T_0^k|_{L2}} \leq 10^{-4}$  où  $k$  est le numéro du V-cycle. Comme illustré sur la Fig. 3.5, l'erreur de discrétisation sur la grille  $\Omega_0$  est fortement réduite grâce à la méthode FIC et décroît bien en  $\mathcal{O}(h_{l_{max}})$  jusqu'à ce que l'erreur de pollution ne devienne prédominante. L'erreur globale est alors contrôlée par la zone non raffinée.

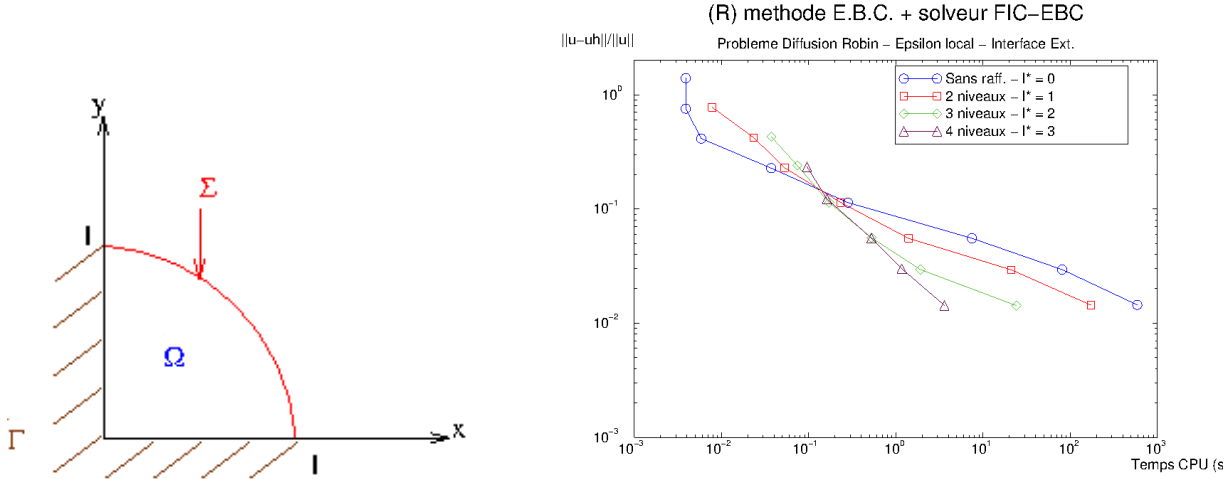


FIG. 3.4 – Résolution d'une équation de type diffusion-convection en thermique avec des conditions limites de Robin par une méthode AMR de type multi-niveaux. A gauche : géométrie. A droite : évolution de l'erreur en norme  $L^2$  pour une équation de diffusion seule en fonction du temps CPU ( $l^* = l_{max}$ ).

Ces performances sont typiques de celles que l'on peut atteindre sur des problèmes analytiques avec les méthodes LDC en EF ou FIC en VF (Ramière et al. 2007a;b). En particulier, elles permettent de réduire efficacement le temps CPU des calculs lorsque le nombre de degrés de liberté est important, cf. Fig. 3.4 à droite.

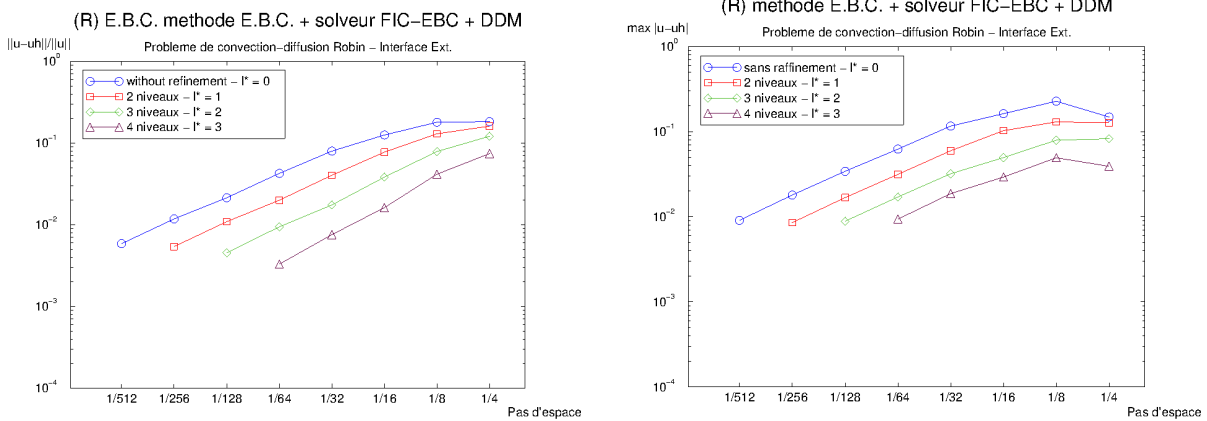


FIG. 3.5 – Résolution d'une équation de type diffusion - convection en thermique avec des conditions limites de Robin par une méthode AMR de type multi-niveaux ( $l^* = l_{max}$ ). A gauche : évolution de l'erreur en norme  $L^2$  en fonction du pas d'espace. A droite : évolution de l'erreur en norme max en fonction du pas d'espace.

### 3.3.2 Applications au générateur de vapeur

Des applications de notre méthode LDC bi-grilles (i) au chignon du faisceau de tubes, cf. Figs 3.6 et 3.7, et (ii) à la plaque de distribution en partie basse de la maquette Clotaire, cf. Fig. 3.11 font l'objet de l'article Belliard et Grandotto (2003a). Le cas de la plaque de distribution est particulièrement intéressant car le domaine est dit *flottant*, i.e. il ne touche aucun des bords du domaine de calcul. Suivant le lieu de  $\partial\Omega_0$ , le fluide est entrant ou sortant, ce qui est pris en compte par un traitement de type ADN des conditions aux limites, cf. Section 1.2.3. Il en est de même pour le cas du chignon car il existe un vortex en sortie de la zone de raffinement.

Une amélioration substantielle des simulations est ainsi obtenue dans les zones de raffinement,

mais également dans l'ensemble du domaine de calcul. Je ne présente pas ici de façon exhaustive les résultats obtenus, mais seulement des points saillants. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article.

Les simulations en raffinement local sont comparées à celles réalisées sur un domaine unique grossier (cas noté Ref0) ou raffiné de partout (cas noté Ref1 ; le pas d'espace du maillage grossier est divisé par 2 dans chaque direction). Les calculs sur le domaine principal  $\Omega_0$  et celui de raffinement  $\Omega_1$  sont réalisés en parallèle.

### Chignon du faisceau de tubes

Concernant l'interaction du fluide et des structures du GV, une zone clef est celle du chignon. On s'intéresse ici à la réalisation d'un raffinement local dans cette région pour la maquette Clotaire, cf. Section 1.3.

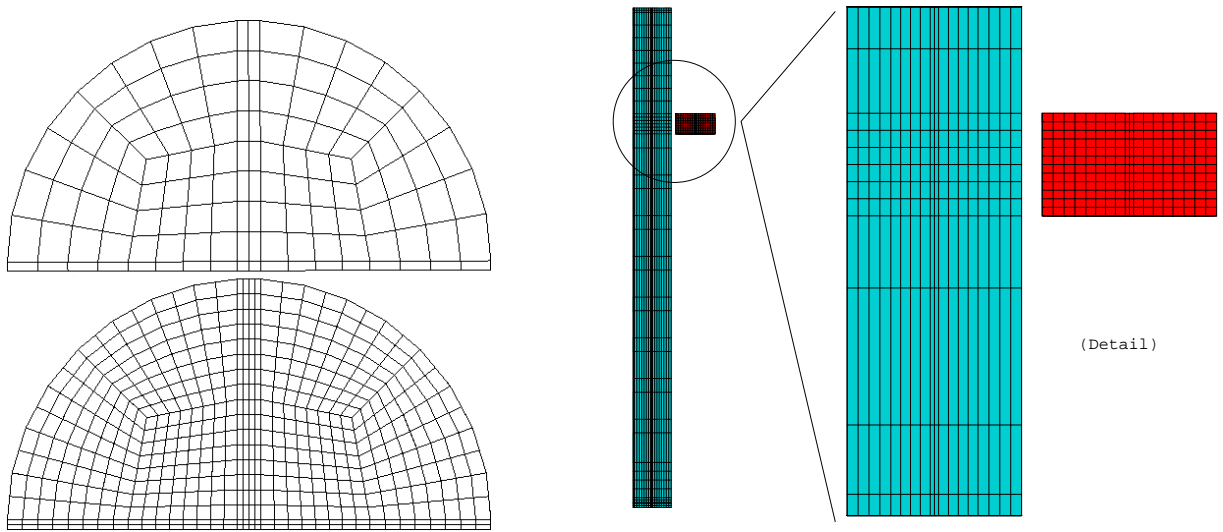


FIG. 3.6 – Calcul en raffinement local du chignon du faisceau de tubes en U primaires. A gauche en haut : coupe horizontale du maillage 3D à 5 330 éléments du domaine principal  $\Omega_0$  (130 éléments dans la coupe). A gauche en bas : coupe horizontale du maillage 3D à 6 240 éléments du domaine de raffinement  $\Omega_1$  (520 éléments dans la coupe). A droite, maillages 3D emboîtés pour la méthode LDC (coupe verticale) : domaine principal  $\Omega_0$  en bleu et de raffinement  $\Omega_1$  en rouge.

La Fig. 3.6 illustre les maillages emboîtés utilisés. Les 780 éléments du maillage du domaine principal situés dans la région du chignon  $\Omega_{0,raff}$  sont chacun découpés en huit. Au final, le maillage composite  $(\Omega_0 \cup \Omega_1) \setminus \Omega_{0,raff}$  est formé de 10 790 éléments, à comparer à 42 640 éléments en cas de raffinement uniforme (ref1). La différence de résolution spatiale dans le chignon est clairement visible sur la Fig. 3.7 où est surimposé le maillage *technologique* du faisceau de tubes primaires ; ce qui impacte toutes les quantités calculées par intersections géométriques entre le maillage de calcul et celui *technologique* (porosité, taux de présence, ...).

Les conditions aux limites du domaine de raffinement consistent en une entrée, des parois et une sortie traitée par la méthode ADN relaxée, cf. Section 1.2.3. La température en entrée des tubes primaires et le flux thermique en sortie sont fournis par le domaine principal. Les calculs s'exécutent en parallèles<sup>6</sup> avec des échanges de données tous les  $cp = 20$  itérations en temps<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>L'algorithme séquentiel LDC conduit à des résultats similaires à celui parallèle. La convergence est plus monotone, mais le temps CPU est bien plus grand – typiquement d'un facteur deux.

<sup>7</sup>Due aux fortes non linéarités des EDP, résoudre ( $cp = 100$  par exemple) au lieu de lisser n'apporte pas d'accélération pour la convergence des calculs.



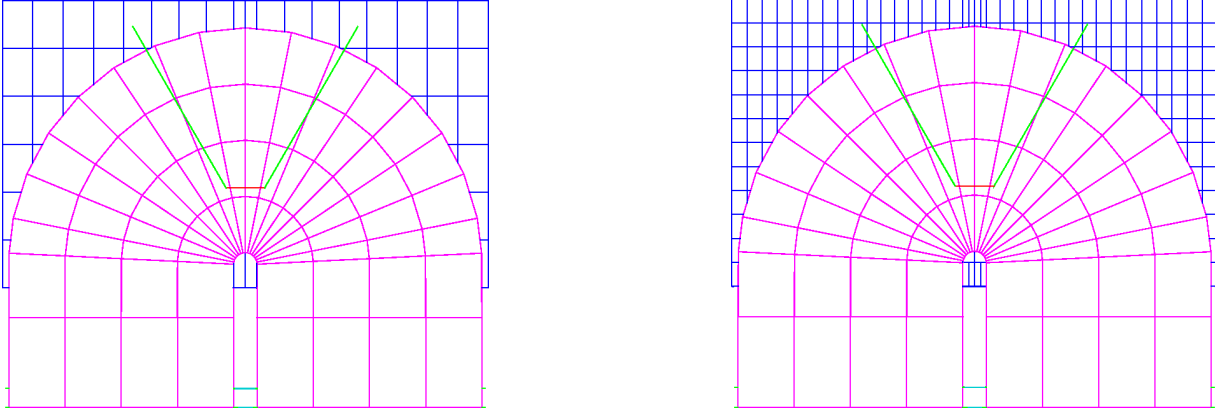


FIG. 3.7 – Calcul fin local du chignon du faisceau de tubes en U primaires. Détails des coupes verticales du maillage global  $\Omega_0$  (à gauche, couleur bleu) et du maillage local  $\Omega_1$  (à droite, couleur bleu) avec la zone du faisceau de tubes primaires (couleur rose, maillage uniquement utilisé pour le calcul de quantités géométriques et physiques).

Simulation	Itérations en temps	CPU (s)	Mémoire (Mo)
LDC global	520	2 270	40
LDC zoom	520	3 270	80
Refo	493	1 960	20
Ref1	1 079	27 820	280

TAB. 3.1 – Caractéristiques des simulations avec raffinement local du chignon. Critère de régime stationnaire :  $\epsilon_{st} = 5.10^{-3}s^{-1}$ , cf. Eq. (A.3).

La Table 3.1 reprend les principales caractéristiques des calculs. On constate que le coût en mémoire et, surtout, en temps de calcul de la simulation avec raffinement dans la zone du chignon reste raisonnable. Le temps CPU du calcul LDC parallèle est 8 fois plus petit que celui du calcul où on raffine le maillage de partout (Ref1) et seulement 1,7 fois plus grand que celui du calcul sans raffinement (Refo). Les historiques de convergence vers le stationnaire des calculs du domaine principal avec ou sans raffinement local sont similaires. De fait, au bout d’une quinzaine de V-cycles, les corrections LDC sont stabilisées.

Les quantités globales décrivant les résultats de calculs, telles la puissance échangée, le débit de vapeur, ..., sont similaires à quelques pour mille près. Localement, par contre, la correction LDC apporte une amélioration sensible comme on peut en juger sur la Fig. 3.8. Celle-ci présente un zoom dans la région du chignon du profil de l’enthalpie suivant une ligne verticale en branche froide. Les profils dans  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont similaires (traits pleins) et cohérents avec les résultats de Ref1 dans cette région. Toutefois, le bénéfice de la correction est moins marqué en dehors de la zone de raffinement, surtout en amont de part la nature hyperbolique de l’équation du bilan d’enthalpie (forte convection).

Dans la zone de raffinement, la cohérence entre les résultats obtenus sur les deux grilles (domaine principal et de zoom), est illustrée sur la Fig. 3.9 qui décrit l’historique du nombre de noeuds où le fluide est entrant dans  $\Omega_1$  et leur localisation (CL ADN; Vortex coupant le plan horizontal supérieur).

Enfin, la Fig. 3.10 indique, dans un plan verticale, la position et la valeur des termes de correction LDC. Les corrections sont particulièrement importantes en bordure du chignon où l’écart de modélisation entre le maillage grossier et de raffinement est le plus marqué.

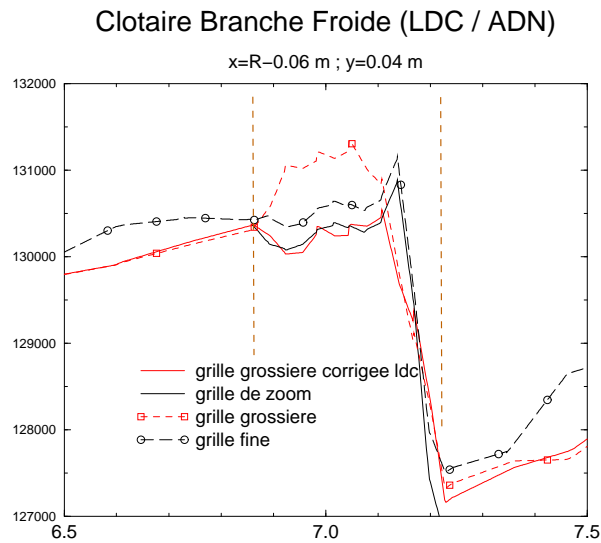


FIG. 3.8 – Profil d'enthalpie spécifique du mélange en  $\text{kJ.kg}^{-1}$  en fonction de l'élévation verticale en mètre (zone des cintres). Méthode LDC. Grille grossière : calcul global sur un maillage grossier (Refo). Grille fine : calcul global sur un maillage fin (Ref1). Grille de zoom : calcul local dans le chignon sur un maillage fin. Grille grossière corrigée LDC : calcul global sur un maillage grossier avec correction LDC à l'intérieur de la zone de zoom, représentée par des traits pointillés verticaux.

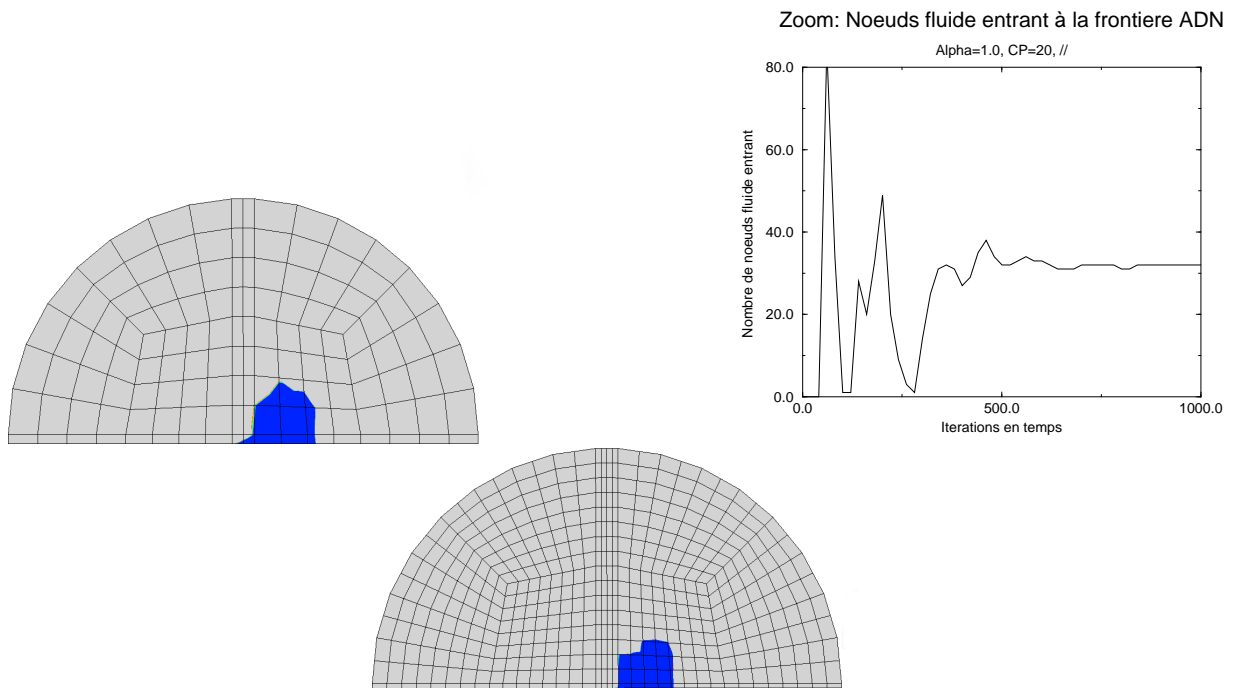


FIG. 3.9 – Simulation LDC du chignon de Clotaire. Conditions limites adaptatives de type ADN pour la zone de zoom (chignon). Visualisations de la région de fluide entrant dans la zone de zoom (valeur négative du produit scalaire vitesse-normale externe à  $\Omega_1$ ). A gauche, en haut : maillage grossier du domaine principal  $\Omega_0$ . Au milieu : maillage de raffinement  $\Omega_1$ . La région de fluide entrant est colorée en bleu. A droite, en haut : historique du nombre de noeuds entrants.

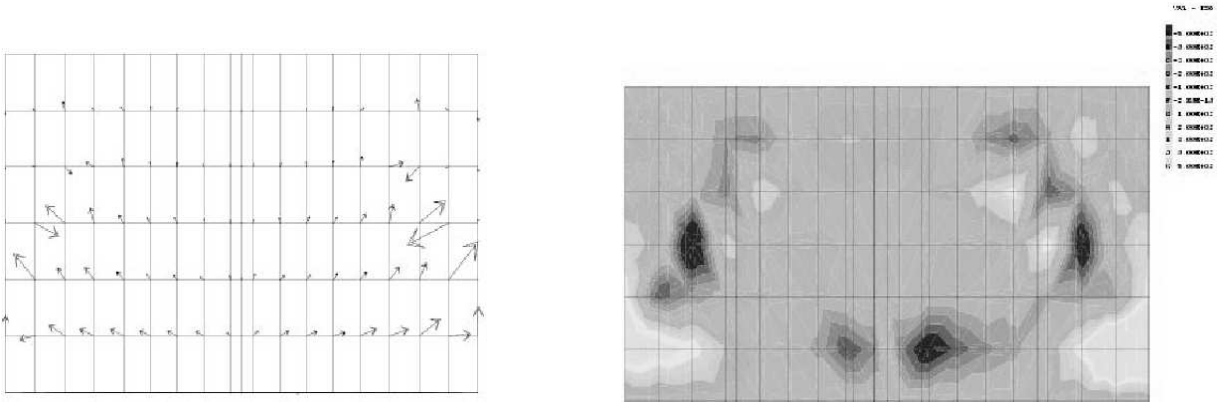


FIG. 3.10 – Localisation et valeurs des termes de correction LDC. Coupe verticale à 5 cm à l'intérieur du domaine principal  $\Omega_0$  (zone du chignon). A gauche : bilan de QDM. A droite : bilan d'enthalpie.

### Plaque de distribution

Le raffinement de maillage dans la zone libre de la plaque de distribution – plaque trouée située en bas de l'évaporateur permettant de contrôler le débit dans la zone centrale – correspond à un cas test de domaine flottant, i.e.  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$ , cf. Fig. 3.11. L'algorithme LDC est réalisé en parallèle et les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_1$  sont de type Dirichlet et ADN.

Après un début de transitoire, où un vertex se forme et disparaît, le régime stationnaire est atteint. Ici aussi, dans la zone d'intérêt – entre la plaque de distribution et la première plaque entretoise –, les résultats en raffinement local sont proches de ceux obtenus avec un raffinement uniforme, cf. Fig. 3.12.

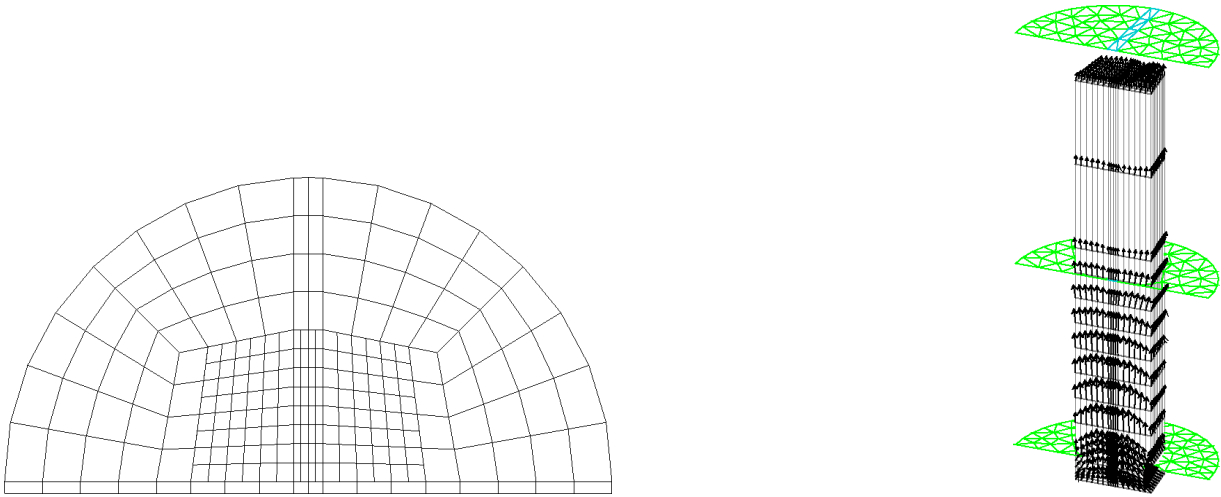


FIG. 3.11 – Raffinement local LDC de la zone libre de la plaque de distribution de Clotaire. Le domaine de raffinement est flottant. A gauche : coupe horizontale des maillages emboîtés du domaine principal  $\Omega_0$  (5 330 éléments) et de raffinement  $\Omega_1$  (2 048 éléments). A droite : visualisation du maillage de raffinement et des vitesses massiques, ainsi que de la plaque de distribution (en bas) et des deux premières plaques entretoises.

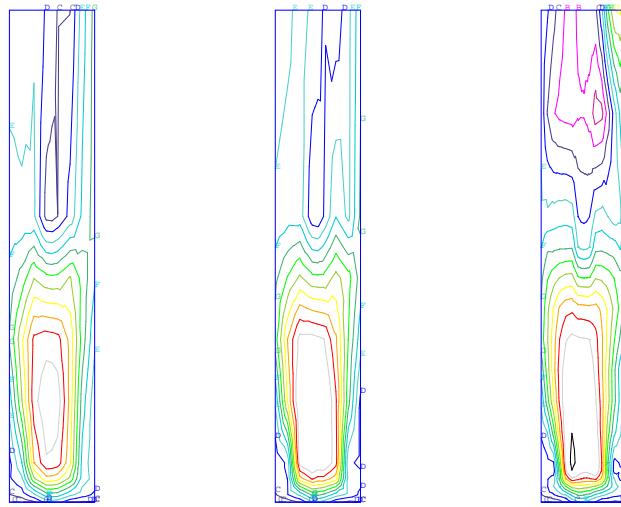


FIG. 3.12 – Iso-valeurs de la composante verticale du flux de masse du mélange dans une section verticale au voisinage de la plaque de distribution de Clotaire. A gauche : calcul Refo du domaine  $\Omega_0$  sans corrections. Au centre : calcul du domaine  $\Omega_0$  avec raffinement de maillage local  $\Omega_1$  et corrections LDC. A droite : calcul Ref1 du domaine  $\Omega_0$  avec un raffinement uniforme. Algorithme LDC : période de couplage de 20 itérations en temps, CL de type Dirichlet et ADN sans relaxation.

## CONCLUSION DU CHAPITRE

J'ai présenté le principe des méthodes de raffinement local et développé en particulier deux d'entre elles : la correction de flux à l'interface, FIC, et la correction locale du résidu, LDC. La première a été adaptée à la problématique du raffinement local en présence d'une frontière immergée (Ramière et al. 2007b) et la seconde à un système d'équations fortement non linéaires, proche de celui de Navier-Stokes dans son formalisme (Belliard et Grandotto 2003a). Cette version originale de la méthode LDC correspond à un algorithme parallèle dont le solveur a été remplacé par un lisseur – une série d'itérations relaxées de Picard. De part la présence de vortex dans l'écoulement, les conditions aux limites retenues sont adaptées localement : approche ADN.

La convergence de l'erreur sur le domaine principal en  $\mathcal{O}(h_{l_{max}}^m)$  a été vérifiée à partir de solutions analytiques de problèmes de diffusion-convection scalaires. Ici,  $m$  est l'ordre du schéma numérique et  $h_{l_{max}}$  le pas du maillage de raffinement le plus fin.

L'application de cette version de la méthode LDC au raffinement local de maillage pour la simulation du générateur de vapeur permet de fortement accroître la précision des calculs dans les zones raffinées. Contrairement à un simple enchaînement de calculs, on a une forte cohérence entre les résultats sur le domaine principal et ceux sur celui de raffinement. Ici, le raffinement n'est pas massif mais restreint à certaines régions d'intérêt pour le concepteur. De fait, la proportion du domaine  $\Omega_0$  qui est raffiné n'est pas très importante et le bénéfice du raffinement est plus localisé que pour les problèmes académiques (erreur de pollution). Localement, les résultats obtenus par l'algorithme LDC sont proches et cohérents avec ceux obtenus par un raffinement uniforme – pour un coût bien moindre.

En particulier, ce type de raffinement par patch évite l'approche grille et schéma composites au prix d'itérations de couplage entre les niveaux. Ce qui présente l'intérêt de peu modifier les codes de calcul existants et d'introduire des outils numériques modernes pour des codes anciens.

Comme perspective, on peut envisager le développement d'une version EF de la méthode FIC et son application au GV afin d'accroître la cohérence des flux à l'interface de la zone de raffinement.



# DOMAINES FICTIFS

## SOMMAIRE

4.1	CONTEXTE . . . . .	63
4.1.1	Enjeux et motivations . . . . .	63
4.1.2	Objectifs et approche générale . . . . .	63
4.2	MÉTHODES DE DOMAINES FICTIFS . . . . .	64
4.2.1	Introduction . . . . .	64
4.2.2	Pistes de recherche et cadre logiciel . . . . .	65
4.2.3	Modification local du schéma : la méthode FIC-JEBC . . . . .	66
4.2.4	Modification local de l'équation : les méthodes FE-ISI et PDF . . . . .	68
4.3	APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR ET EN HYDRODYNAMIQUE . . . . .	70
4.3.1	Générateur de vapeur . . . . .	70
4.3.2	Creuset froid nucléarisé . . . . .	71
	CONCLUSION . . . . .	73

ON s'intéresse ici aux méthodes de domaines fictifs ou, encore, de frontière immergée. En particulier, l'intérêt de celles-ci est d'optimiser les simulations en facilitant la mise en oeuvre de solveurs rapides sur des grilles cartésiennes et de s'affranchir de la nécessité de remailler en cas d'obstacles en mouvement – problématique de l'interaction fluide structure – au prix d'une modification locale des équations du problème de départ (ajout de termes) ou du schéma de calcul.



## 4.1 CONTEXTE

Dans ce chapitre, deux types de contexte sont abordés. Le premier est l'optimisation des performances des calculs en termes de temps de restitution et de mémoire ; ici sous l'angle des limitations induites par les maillages non structurés. Le second est la prise en compte d'obstacles en mouvement : c'est un point clef pour l'étude de l'interaction fluide structure, IFS.

### 4.1.1 Enjeux et motivations

En remplaçant les maillages structurés ou réguliers, les maillages non structurés se sont imposés dans les logiciels industriels de calcul. Ils permettent, en particulier, de prendre en compte de façon précise la géométrie parfois complexe des objets technologiques – approche dite *body-fitted* – ainsi que la localisation des conditions aux limites, CL. Toutefois, leurs principaux défauts sont la lourdeur des structures de données de maillage (liste d'éléments interconnectés), la dégradation éventuelle de la précision du calcul vis-à-vis des grilles cartésiennes (rapport d'aspect des cellules), la perte de régularité des matrices des systèmes linéaires (structure diagonale, largeur de bande, ...) et l'incompatibilité avec des méthodes de résolution rapide ou précise (méthodes spectrales par exemple). Afin de palier à ces défauts, on explore ici une autre approche basée sur les maillages structurés (ou structurés par blocs) cartésiens ou logiquement équivalents à un maillage cartésien, globalement conforme ou non. Notre motivation est bien évidemment l'optimisation des performances des simulations

Par ailleurs et bien que peu évoqué jusqu'ici, un autre enjeu important dans les composants nucléaires est la facilité à modéliser des structures en mouvement et interagissant avec le fluide (IFS). Par exemple, les vibrations induites sur les tubes primaires ou les crayons combustibles peuvent fortement les détériorer. Les études de sûreté demandent une prise en compte de ces phénomènes. On doit donc modéliser l'impact du fluide turbulent monophasique ou diphasique sur ces structures et l'effet en retour sur le fluide. A ce jour, on ne réalise que du chaînage de codes – thermohydraulique puis mécanique. L'industrie est motivée par la réalisation de simulations incluant le couplage de la dynamique du fluide à celle des structures au sein d'un seul calcul. A noter qu'une des difficultés de ce type d'approche est le coût important du remaillage du domaine fluide dans le cas d'obstacles ou de frontières en mouvement.

### 4.1.2 Objectifs et approche générale

On s'intéresse ici aux méthodes de domaines fictifs – ou encore de frontière immergée. Le principe directeur est d'immerger le domaine physique étudié dans un domaine de calcul plus grand, mais de forme géométrique plus simple. Le domaine physique est alors décrit dans le domaine fictif par une fonction de masque, éventuellement variable en temps. Ceci permet d'optimiser les simulations en réduisant leurs coûts : solveurs linéaires rapides sur des grilles cartésiennes, utilisation de tableau  $(i, j, k)$ , pas de connectivité géométrique à stocker pour les maillages, pas d'étapes de remaillage pour des obstacles en mouvement, ... et précision optimale du schéma numérique. On peut aussi citer la possibilité d'utiliser des méthodes se prêtant bien aux maillages cartésiens – l'analyse multi-résolution par exemple (Müller 2002, Roussel et Schneider 2005). Par contre, une modification locale des EDP ou du schéma de calcul est requise afin que la restriction de la solution du problème fictif au domaine physique soit égale à la solution du problème physique.

Au delà du manque de souplesse vis-à-vis de la géométrie du domaine de calcul – ce qui est corrigé par l'approche domaine fictif –, un défaut des maillages cartésiens est la difficulté à gérer la concentration des points de calculs dans une zone donnée du domaine de calcul pour accroître la précision. La réponse apportée ici est l'utilisation de méthodes de raffinement local par patches, cf. Chapitre 3.



## 4.2 MÉTHODES DE DOMAINES FICTIFS

[\bullet] *Méthodes de domaines fictifs, de types JEBC, ISI ou PDF, en parallèle ou séquentiel et avec ou sans raffinement local de maillages non-conformes.*

Avec I. Ramière (PhD), C. Introïni et Y. Gorsse (Post-Doc) du CEA Cadarache et C. Fournier du CEA Grenoble

Interactions : Ph. Angot d'Aix-Marseille Université

Publications associées : Ramière et al. (2007a), Ramière et al. (2007b), Belliard et Fournier (2010), Belliard et Ramière (2012) et Introïni et al. (2014)

Conférences associées : Ramière et al. (2005a), Ramière et al. (2005b), Belliard et Ramière (2007), Belliard (2009), Introïni et al. (2012) et Belliard et Introïni (2013)

### 4.2.1 Introduction

La méthode des domaines fictifs, initialement introduite par V. K. Saul'ev au début des années 60 (Saul'ev 1963, Marchuk 1982 (1st ed. 1975)), immerge le domaine de calcul réel  $\tilde{\Omega}$ , dit aussi physique, dans un domaine de calcul  $\Omega$ , dit fictif, de forme géométrique plus simple, cf. Fig. 4.1. Formellement, on remplace la résolution d'un problème réel  $(\tilde{\mathcal{P}})$  défini sur le domaine initial de calcul  $\tilde{\Omega}$  – pour  $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$  et  $\tilde{T} : V(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^2(\tilde{\Omega})$ , trouver  $\tilde{u} \in V(\tilde{\Omega})$  tel que :

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \begin{cases} \tilde{T}(\tilde{u}) = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \text{CL} & \text{sur } \partial\tilde{\Omega} \end{cases} \quad (4.1)$$

– par celle d'un problème fictif  $(\mathcal{P})$  – pour  $f \in L^2(\Omega)$  et  $T : V(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , trouver  $u \in V(\Omega)$  tel que :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} T(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \text{CL} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

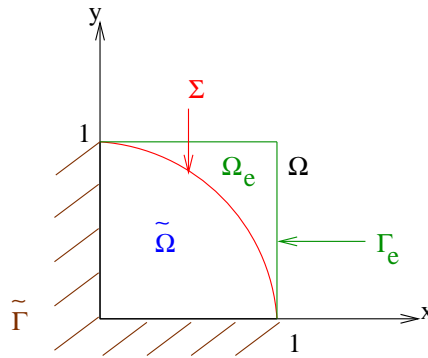


FIG. 4.1 – Définition du concept de la méthode des domaines fictifs sur un quart de disque  $\tilde{\Omega}$  – domaine physique – immergé dans un carré  $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Sigma \cup \Omega_e$  – domaine fictif. La frontière  $\Sigma = \partial\tilde{\Omega} \setminus (\partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega})$  incluse dans  $\Omega$  devient une frontière immergée.

Ici,  $V(\tilde{\Omega})$  est l'espace vectoriel des solutions du problème physique  $(\tilde{\mathcal{P}})$ . Il apparaît alors une frontière immergée  $\Sigma = \partial\tilde{\Omega} \setminus (\partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega})$  associée à des conditions aux limites immergées *Immersed Boundary Conditions* en anglais, IBC. Le problème fictif  $(\mathcal{P})$  est défini par la donnée d'une EDP sur  $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Sigma \cup \Omega_e$  et des conditions aux limites sur  $\tilde{\Gamma} = \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}$  et  $\Gamma_e = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega})$ , cf. Fig. 4.1.

La dissociation du maillage de calcul, ici cartésien, de la forme géométrique des obstacles (fonction de type masque géométrique) facilite la gestion des interfaces mobiles – modification de la géométrie de la frontière immergée au lieu d'un remaillage du domaine de calcul.

### 4.2.2 Pistes de recherche et cadre logiciel

L'interface immergée peut être perçue comme une frontière – conditions aux limites – ou une interface physique entre deux milieux. Généralisant cette dernière approche et en suivant Khadra et al. (2000), on peut envisager de modéliser l'ensemble des différents *constituants* du problème de la simulation du composant nucléaire – le fluide, les poreux et les obstacles (internes et/ou externes), cf. Fig. 4.2 – au sein d'un seul domaine fictif (hétérogène) de calcul régi par un unique système d'EDP. De même, les frontières entre ces constituants peuvent être considérés comme rigides ou se déformant (surface libre par exemple). Dans l'article de Khadra et al., cela est fait en ajoutant au bilan de quantité de mouvement adimensionné d'un fluide incompressible un terme *à la* Darcy – globalement le milieu est décrit par les équations de Navier-Stokes/Brinkman – :

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{1}{R_e} \nabla (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^T \mathbf{V})) = -\nabla P + \mathbf{f} - \frac{\mu}{R_e D_a K} \mathbf{V} \quad (4.3)$$

où  $D_a$  est le nombre de Darcy,  $K$  la perméabilité locale du milieu et  $R_e$  le nombre de Reynolds. La perméabilité dépend du milieu considéré :  $K := K_f \rightarrow +\infty$  dans le fluide,  $K := K_s \rightarrow 0^+$  dans le solide et  $K := K_p$  dans le poreux. Dans le domaine  $\Omega$ , la convergence en norme  $H^1$  est en  $\mathcal{O}(K_f^{-1} + K_s^{1/4})$  et en  $\mathcal{O}(K_s^{3/4})$  pour la norme  $L^2$  dans le solide (Khadra et al. 2000). Les conditions aux limites immergées au bord du domaine physique sont prises en compte par pénalisation  $L^2$  d'une condition de Robin en volume ou en surface, comme à la Section 4.2.3. De fait, le terme  $-\beta \tilde{\Delta} \mathbf{V}$ , similaire au terme de Darcy, est déjà présent dans Eq. (2).

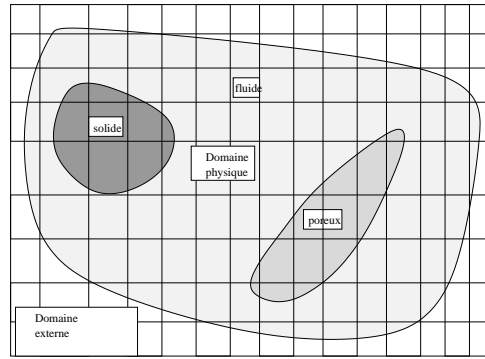


FIG. 4.2 – Immersion dans un unique domaine fictif  $\Omega$  d'un problème de type Navier-Stokes formé de différents milieux : fluide, poreux et solides. Le domaine physique  $\tilde{\Omega}$  est entouré d'un domaine extérieur  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  pouvant être éventuellement considéré comme un solide.

Les diverses méthodes de domaines fictifs se différencient par la façon d'imposer les IBC. Le schéma de calcul peut être modifié localement – comme pour la méthode *Immersed Interface Method*, IIM (LeVeque et Li 1994) –, ou des termes supplémentaires peuvent être ajoutés aux équations aux dérivées partielles du problème initial – telle la méthode *Immersed Boundary Method*, IBM (Peskin 1972).

Mes travaux portent sur ces deux approches. Vis-à-vis de la première, ils concernent la méthode *Jump embedded boundary conditions*, JEBC, développée par I. Ramière, Ph. Angot et moi-même en volumes finis (VF) cf. Angot (2003), Ramière et al. (2007b), Angot (2010). Concernant la seconde approche, j'ai participé au développement de deux méthodes de modification des EDP initiales : la méthode *Immersed Spread Interface*, ISI, (Ramière et al. 2007a) en éléments finis (EF) et la méthode *Penalized Direct Forcing*, PDF, en VF (Belliard et Fournier 2010, Introïni et al. 2014).

Dans le cas d'une IBC de type Dirichlet,  $u_\Sigma = U_D$  où  $u$  est une variable scalaire, les modifications apportées au schéma de calcul ou à l'EDP proviennent généralement de l'imposition directe – méthode *Direct Forcing* (Mohd-Yusof 1997), par exemple – ou indirecte – comme dans le cas de Eq. (4.3) ou de la méthode PDF par exemple – de la valeur Dirichlet  $u_D$  au bord ou hors du domaine physique. Dans le cas d'une IBC de type Robin, les méthodes JEBC et ISI s'appuient sur l'étude du problème de transmission entre le domaine physique  $\tilde{\Omega}$  et le domaine extérieur  $\Omega_e$  à travers  $\Sigma$ . La condition de Robin s'écrit :  $-(\tilde{D}\nabla u) \cdot \mathbf{n} = \alpha_R (u - u_R) + g_R$ , avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à  $\tilde{\Omega}$  et  $0 < \tilde{D}$ ,  $\alpha_R$ ,  $u_R$  et  $g_R \in \mathbb{R}$ . A travers le choix de ces paramètres, elle dégénère en une condition de Neumann ( $\alpha_R = 0$ ) ou de Dirichlet ( $g_R = 0$ ,  $u_R = u_D$  et  $\alpha_R = \eta^{-1}$ ,  $0 < \eta \ll 1$ ). Elle permet donc de traiter des conditions aux limites immergées de type général : Dirichlet, Neumann et Robin.

Dans le contexte d'une équation de diffusion-convection-réaction, l'étude du problème de transmission, réalisée par I. Ramière, Ph. Angot et moi même (Ramière et al. 2007a), a donné lieu à des expressions originales des IBC. Considérant

$$u \in H^1(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e) := \{u \in L^2(\Omega), u|_{\tilde{\Omega}} := \tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega}) \text{ et } u|_{\Omega_e} := u_e \in H^1(\Omega_e)\}$$

solution du problème fictif ( $\mathcal{P}$ ), avec  $\tilde{u}$  la solution du problème physique ( $\tilde{\mathcal{P}}$ ) et  $u_e$ , une extension de  $\tilde{u}$  sur  $\Omega_e$ , nous obtenons, au sens des distributions :

$$- \operatorname{div}(D\nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{v}u) + bu = f - \llbracket (D\nabla u) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Sigma \delta_\Sigma + \llbracket (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} u) \rrbracket_\Sigma \delta_\Sigma \quad \text{dans } \Omega \quad (4.4)$$

où  $0 < D \in L^\infty(\Omega)$ ,  $b \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\mathbf{v} \in (L^\infty(\Omega))^d$  et  $f \in L^2(\Omega)$  sont obtenus par extension dans  $\Omega_e$  des coefficients physiques et  $D$  et  $b$  vérifient les relations classiques d'ellipticité. Le saut  $\llbracket \cdot \rrbracket_\Sigma$  des traces du flux sur  $\Sigma$  définit alors un terme source sur  $\Sigma$ . Pour une IBC de type Robin, nous désirons avoir sur le coté de  $\Sigma$  dans le domaine physique (noté  $\cdot^-$ ) :  $-(D\nabla u)^- \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = \alpha_R (u^- - u_R)|_\Sigma + g_R$ .

L'interface immergée  $\Sigma$  peut être modélisée par une approximation fine  $\Sigma_h$  – méthode JEBC – ou épaisse, sur quelques cellules,  $\omega_{h,\Sigma}$  – méthode ISI. Dans le premier cas, la distribution de Dirac, intervenant dans l'expression du saut de flux de Eq. (4.4), peut être directement appliquée sur  $\Sigma_h$ . Dans le second cas, elle doit être régularisée sur  $\omega_{h,\Sigma}$ . Dans tous les cas, comme précisé par la suite, l'intégration en espace de Eq. (4.4) sur la frontière approchée doit être corrigée ( $\zeta$ ) pour être consistante avec  $\int (-\llbracket (D\nabla u) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Sigma + \llbracket (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} u) \rrbracket_\Sigma) \delta_\Sigma$ .

Ces développements ont été portés dans le logiciel Génèpi (JEBC et ISI) afin de réaliser des simulations de la thermique des générateurs de vapeur, GV, en domaine fictif (Belliard et Ramière 2012). La volonté de modifier aussi peu que possible le schéma de discrétisation préexistant dans le code a conduit à une méthode d'ordre un en espace. De même, la méthode PDF, à l'ordre un ou deux en espace, a été introduite dans le logiciel CEA Trio\_U (Calvin 2003) pour des applications de calcul parallèle en CFD (Introïni et al. 2014) et dans le contexte de la vitrification des déchets radioactifs (Belliard et Introïni 2013).

#### 4.2.3 Modification local du schéma : la méthode FIC-JEBC

Le schéma Angot (2003) permet d'introduire un saut de variable et/ou de flux sur  $\Sigma$ . Les conditions aux limites immergées sont alors incluses dans le schéma numérique : *Embedded Boundary conditions*, EBC. Le problème fictif Eq. (4.2) pour une équation de diffusion-convection-réaction, s'écrit (Angot 2005, Ramière et al. 2007b), cf. Fig. 4.1,  $u \in V(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e) \subset$

$H^1(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e)$  :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (D \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{v} u) + b u = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{CL originales} & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \text{CL ad hoc} & \text{sur } \Gamma_e, \\ \frac{[(D \nabla u) \cdot \mathbf{n}]_\Sigma}{(D \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_\Sigma} = \alpha \bar{u}|_\Sigma - q & \text{sur } \Sigma, \\ & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4.5)$$

Soit  $\psi$  dans  $V(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e)$  et les traces  $\psi_\Sigma^-$  et  $\psi_\Sigma^+$  de  $\psi|_{\tilde{\Omega}}$  et  $\psi|_{\Omega_e}$  sur  $\Sigma$ . On définit la valeur moyenne arithmétique et le saut des traces de  $\psi$  sur  $\Sigma$  par, respectivement,  $\bar{\psi}|_\Sigma = (\psi_\Sigma^+ + \psi_\Sigma^-)/2$  et  $[[\psi]]_\Sigma = (\psi_\Sigma^+ - \psi_\Sigma^-)$ .

On considère une discrétisation spatiale de type VF. La géométrie de l'interface immergée  $\Sigma$  est approchée aux faces  $\sigma$  des volumes de contrôle :  $\Sigma_h$ , cf. Fig. 4.3 à gauche. La méthode permet de traiter aussi bien une frontière immergée (CL) qu'une interface immergée. Je me restreins ici à un problème de condition limite immergée. Elle est directement appliquée sur  $\Sigma_h$  en place de  $\Sigma$ . On a donc une méthode d'ordre  $\mathcal{O}(h^1)$  en espace. Les coefficients de transmission  $0 < \alpha$ ,  $0 < \beta$ ,  $q$  et  $g$  sont des fonctions bornées sur  $\Sigma_h$  et  $D|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{D}$ ,  $\mathbf{v}|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{\mathbf{v}}$ ,  $b|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{b}$ ,  $f|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{f}$ .

Les conditions de transmission Eq. (4.4) sont incorporées dans les équations de saut de (4.5) qui font intervenir les traces sur  $\Sigma_h$  de la variable et du flux de diffusion  $\varphi : u_{\Sigma_h}^+, u_{\Sigma_h}^-, \varphi_{\Sigma_h}^- \equiv -(D \nabla u)^- \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_h}$  et  $\varphi_{\Sigma_h}^+ \equiv -(D \nabla u)^+ \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_h}$ . Afin de ne pas augmenter le nombre d'inconnus, on élimine ces variables d'interface, tout en prenant en compte la condition de robin sur  $\varphi_{\Sigma_h}^-$ . La liberté du choix des coefficients de transmission confère une grande souplesse à cette approche. Par exemple, on retrouve la transmission parfaite ( $u_{\Sigma_h}^+ = u_{\Sigma_h}^-$  et  $\varphi_{\Sigma_h}^+ = \varphi_{\Sigma_h}^-$ ) pour  $\alpha = g = q = 0$  et  $\beta \rightarrow \infty$ . Un choix intéressant, que nous avons fait et nommé "sans contrôle externe", consiste en :  $\alpha = 4\beta = 2\alpha_R$  et  $g - \frac{q}{2} = g_R - \alpha_R u_R$ . Il rend le problème physique indépendant de  $u_{\Sigma_h}^+$  et  $\varphi_{\Sigma_h}^+$ . Le cas Dirichlet est obtenu comme limite de  $\alpha_R = \frac{1}{\eta}$ ,  $0 < \eta \ll 1$ , et  $u_R = u_D$ . Le choix  $\alpha = 4\beta = 2\alpha_R$  induit la continuité de  $u$  à l'interface. La convergence en norme  $H^1$  est en  $\mathcal{O}(\eta^{1/2})$ , cf. Angot (2005). Comme mentionnée à la Section 4.2.2, on introduit une correction géométrique des intégrales de surface du flux qui garantit la conservation locale (dans le voisinage  $\hat{K}$  de chaque cellule  $K$ ) de la mesure  $\int_{\Sigma \cap \hat{K}} = \int_{\Sigma_h \cap \hat{K}} \frac{1}{\zeta_K}$ .

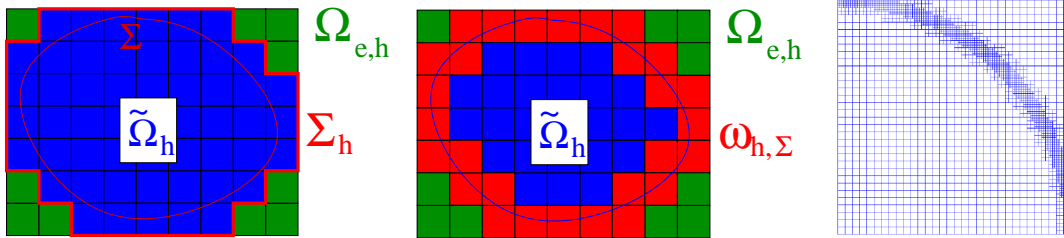


FIG. 4.3 – A gauche : approximation géométrique fine (par excès) de  $\Sigma$  sur les faces  $\sigma$  des cellules :  $\Sigma_h$ . Au centre : approximation géométrique épaisse ou diffuse de  $\Sigma$  :  $\omega_{h,\Sigma}$ . A droite : raffinement local multi-niveaux sur des grilles cartésiennes par bloc pour le cas d'un quart de disque.

Pour augmenter la précision de la méthode, qui converge en  $\mathcal{O}(h^1)$ , on a couplé la méthode JEBC à la méthode de raffinement local multi-niveaux FIC, cf. Chapitre 3, Section 3.2.4 sur des grilles cartésiennes. Chaque volume de contrôle coupé par  $\Sigma$  donne lieu à un patch de raffinement dont la grille est emboîtée dans le volume de contrôle.

#### 4.2.4 Modification local de l'équation : les méthodes FE-ISI et PDF

##### La méthode FE-ISI

Cette méthode (Ramière et al. 2007a) de frontière immergée (CL) modélise  $\Sigma$  de façon épaisse,  $\omega_{h,\Sigma}$ , i.e. sur une épaisseur de maille. Dans le cadre des EF (FE en anglais, d'où le sigle), l'équation Eq. 4.4, pondérée par la fonction de forme  $\varphi^i \in V_h(\Omega_h) \subset H^1(\Omega_h)$  au nœud  $i$ , est intégrée sur le domaine fictif en remplaçant la distribution  $\delta_\Sigma$  par une fonction régularisante. De fait, au niveau discret, on utilise une fonction créneau sur  $\omega_{h,\Sigma}$ . On a donc une méthode d'ordre  $\mathcal{O}(h^1)$  en espace. Le terme de saut de flux est interprété comme un terme source. Prenant en compte  $-(D\nabla u)^- \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = \alpha_R (u^- - u_R)|_\Sigma + g_R$  et choisissant  $-(D\nabla u)^+ \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = 0$ , on obtient, pour une équation de diffusion-convection-réaction, le problème fictif suivant sur  $\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cup \omega_{h,\Sigma} \cup \Omega_{e,h}$ , cf. Fig 4.3 au centre,  $u \in V_h(\Omega_h)$  et  $\forall \varphi^i \in V_h(\Omega_h)$  :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} - \int_{\Omega_h} \varphi^i \nabla \cdot (D \nabla u) + \int_{\Omega_h} \varphi^i \nabla \cdot (\mathbf{v} u) + \int_{\Omega_h} \varphi^i b u \\ \quad + \int_{\omega_{h,\Sigma}} \varphi^i \frac{\alpha_R (u - u_R) + g_R}{\zeta} = \int_{\Omega_h} \varphi^i f & \text{dans } \Omega_h, \\ \text{CL originales} & \text{sur } \tilde{\Gamma}_h, \\ \text{CL ad hoc} & \text{sur } \Gamma_{e,h}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Pour les coefficients de l'EDP, on impose  $D|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{D}$ ,  $\mathbf{v}|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{\mathbf{v}}$ ,  $b|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{b}$ ,  $f|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{f}$ . L'extension de ces coefficients dans  $\Omega_{e,h}$  est choisie, comme les CL sur  $\Gamma_{e,h}$ , de façon à être compatible avec  $-(D\nabla u)^+ \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = 0$ . En particulier :  $\mathbf{v}|_{\Omega_{e,h}} = \mathbf{0}$  et CL Neumann homogène sur  $\Gamma_{e,h}$ . Dans la même veine que pour la méthode FIC-JEBC, le correcteur géométrique  $\zeta_E$  est local à l'élément  $E$  de telle façon que l'on ait conservation exacte de la mesure géométrique  $\int_{\Sigma \cap E} = \int_{\omega_{h,\Sigma} \cap E} \frac{1}{\zeta_E}$ .

A noter qu'on peut trouver une analyse théorique partielle dans Ramière (2008).

On diminue également l'erreur liée à la modélisation de la frontière immergée à l'ordre un en espace par la méthode de raffinement local multi-niveaux LDC, cf. Chapitre 3, Section 3.2.3, sur des grilles cartésiennes par bloc, cf. Fig 4.3 à droite.

##### La méthode PDF

Dans un autre contexte que celui de l'étude du problème de transmission, cf. Section 4.2.2, et plus particulièrement dans le cadre des équations de Navier-Stokes en fluide incompressible,  $\tilde{\Omega} = \Omega_f$ , on s'intéresse à une variante pénalisée, PDF (Bellard et Fournier 2010), de la méthode du forçage direct, DF, initialement proposée par Mohd-Yusof (1997).

La méthode DF permet de modéliser une IBC, généralement de type Dirichlet en vitesse,  $\mathbf{V}|_\Sigma = \mathbf{V}_D$ , sur une interface fine  $\Sigma_h$  approchée par défaut (i.e.  $\Sigma_h \subset \tilde{\Omega}$ ). Cette dernière correspond à un ensemble de degrés de liberté du fluide devenant des lieux de CL Dirichlet,  $\mathbf{V}|_{\Sigma_h} = \mathbf{V}_s$ , cf. Fig. 4.4. La vitesse  $\mathbf{V}_s$  à imposer sur  $\Sigma_h$  est déterminée à partir d'une interpolation  $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$  fonction de  $\mathbf{V}$  vitesse du fluide et  $\mathbf{V}_D$  (Fadlun et al. 2000) :  $\mathbf{V}_s = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_D)$ . Le domaine fictif discret est ici aussi décomposé en  $\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cup \Sigma_h \cup \Omega_{e,h}$ . Suivant les variantes, les degrés de liberté situés dans  $\Omega_{e,h}$  peuvent être non calculés, forcés à  $\mathbf{V}_D$ , déterminés par extrapolation de  $\mathbf{V}$ , ...

La méthode DF consiste à ajouter, au second membre du bilan de quantité de mouvement, un terme dit de forçage  $\mathbf{F}$  permettant d'imposer directement une IBC Dirichlet sur les degrés de liberté inclus dans  $\Sigma_h$  :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\delta t} = \mathbf{T}_{n,n+1} + \mathbf{F}_{n,n+1} & \text{dans } \Omega \text{ avec :} \\ \mathbf{T}_{n,n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{V}^{n,*} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{V}^{n+1} - \frac{\nabla P^{n+1}}{\rho} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{V}^{n+1}) \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $\mathbf{f}$  un terme source. Le terme de forçage est défini par :

$$\mathbf{F}_{n,n+1} = \chi_s \left[ \frac{(\mathbf{V}_s^{n+1} - \mathbf{V}^n)}{\delta t} - \mathbf{T}_{n,n+1} \right] \quad (4.8)$$

avec  $\chi_s : R^3 \rightarrow \{0;1\}$  la fonction caractéristique des degrés de liberté situés dans  $\Sigma_h \cup \Omega_{e,h}$  – ou  $\Sigma_h$  suivant la méthode. Pour résoudre le couple  $(\mathbf{V}, P)$  sous la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  dans  $\tilde{\Omega}$ , on peut utiliser un schéma fractionnaire de type projection (Chorin 1968, Temam 1968), cf. Eqs (A.4)-(A.6). Le système (4.7)-(4.8) fait alors intervenir la vitesse prédite  $\mathbf{V}^*$  et non  $\mathbf{V}^{n+1}$ . Afin d’être consistant, i.e. la vitesse  $\mathbf{V}^{n+1}$  est à divergence nulle et respecte les IBC, l’équation de projection Eq. (A.5) doit prendre en compte  $\bar{\varepsilon}$  (Ikeno et Kajishima 2007).

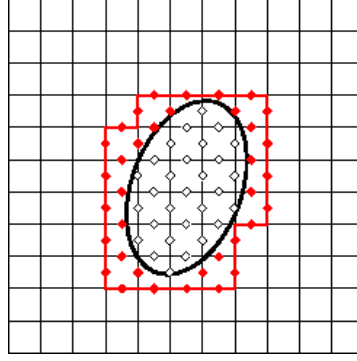


FIG. 4.4 – Méthodes DF et PDF. Discrétisation spatiale de type MAC. Les degrés de liberté forcés de  $\Omega_{e,h}$  sont représentés par des  $\diamond$  (pleins en rouge :  $\mathbf{V}_s$ , vitesse interpolée ; vides en noir :  $\mathbf{V}_D$ , vitesse Dirichlet du problème continu). La frontière immergée approchée  $\Sigma_h$  est en trait plein rouge. Les degrés de liberté de  $\tilde{\Omega}$ , vitesse  $\mathbf{V}$ , ne sont pas représentés.

La méthode de forçage direct pénalisé, PDF, que nous avons développée (Bellard et Fournier 2010) permet de respecter facilement cette consistance, i.e. sans faire intervenir  $\bar{\varepsilon}$  dans l’étape de projection/correction. Elle conjugue méthodes de projection, de forçage direct et de pénalisation  $L^2$  des vitesses (Khadra et al. 2000). Tout d’abord, on remarque que le terme de forçage, Eq. (4.8), peut se mettre sous la forme :  $\mathbf{F}_{n,n+1} = \frac{\chi_s}{\eta \delta t} [\mathbf{V}_s^{n+1} - \hat{\mathbf{V}}]$  où  $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^n + \delta t \mathbf{T}_{n,n+1}$  est la vitesse à l’instant  $t^{n+1}$  calculée sans prendre en compte les obstacles. L’idée de base de la méthode PDF est d’impliciter le forçage direct en remplaçant  $\hat{\mathbf{V}}$  par  $\mathbf{V}^{n+1}$  dans l’expression du forçage,  $\mathbf{F}_{n,n+1} = \frac{\chi_s}{\eta \delta t} [\mathbf{V}_s^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1}]$  avec  $0 < \eta \ll 1$ , et de ventiler ce terme dans les équations de prédiction de la vitesse et du calcul du correcteur de pression/vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\delta t} = \nabla \cdot (\nu \nabla \tilde{\mathbf{V}}^{n+1}) - \mathbf{V}^{n*} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \mathbf{f}^{n+1} - \frac{\nabla p^n}{\rho} + \frac{\chi_s}{\eta \delta t} (\mathbf{V}_s^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\delta t} = -\frac{\nabla(p^{n+1} - p^n)}{\rho} + \frac{\chi_s}{\eta \delta t} (\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}^{n+1}) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans  $\Sigma_h \cup \Omega_{e,h}$ , nous avons  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{V}} \sim \mathbf{V}_s^{n+1}$  et  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{V}^{n+1} \sim \tilde{\mathbf{V}}$ . Dans le contexte un peu différent de la pénalisation en volume, il a par ailleurs été démontré que l’ordre de la convergence en norme  $L^2(\Omega_{e,h})$  de la vitesse en fonction de  $\eta$  est  $\leq 3/4$  (Angot et al. 1999). A noter que, dans ce même contexte, le rajout d’une pénalisation  $L^2$  dans l’étape de projection, pour assurer la cohérence des vitesses, a été indépendamment proposé dans (Angot et al. 2008). De plus, en prenant la divergence de la seconde équation du système (4.9), l’étape de projection peut se mettre sous la forme :

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\Delta t}{\check{\rho}} \nabla (p^{n+1} - p^n) \right] = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} - \chi_s \nabla \cdot \mathbf{v}_s^{n+1} \quad \text{dans } \Omega + \text{CL sur } \partial\Omega, \quad (4.10)$$

avec  $\check{\rho} := \rho(1 + \frac{\chi_s}{\eta})$  et  $\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{V}_s$  dans  $\Sigma_h \cup \Omega_{e,h}$ .

Pour  $\chi_s = 1$ , on a  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \check{\rho}(\eta) \approx \mathcal{O}(\eta^{-1})$  et un coefficient effectif de diffusion  $\frac{\eta}{1+\eta} \approx \mathcal{O}(\eta) \ll 1$ , ce qui conduit à un traitement naturel des conditions aux limites de type Neumann pour la

correction de pression aux bords des obstacles.

Cette approche a été utilisée dans Belliard et Fournier (2010) et Introïni et al. (2014) conjointement avec un schéma original et robuste d'interpolation linéaire. Celle-ci ne dépend pas d'une direction particulière, mais est basée sur une reconstruction du gradient moyen de la vitesse autour de l'interface immergée, cette dernière étant reconstruite localement via la résolution d'un problème de minimisation.

### 4.3 APPLICATIONS AU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR ET EN HYDRODYNAMIQUE

Des applications diverses des méthodes de domaines fictifs ont été présentées en détail dans la littérature ou dans des communications, que ce soit pour les méthodes FIC-JEBC en VF et LDC-ISI en EF, Ramière et al. (2007a;b) – cas tests académiques – et Belliard et Ramière (2007), Belliard (2009), Belliard et Ramière (2012) – simulations GV –, ou pour la méthode PDF, Introïni et al. (2014) – cas tests académiques – et Belliard et Introïni (2013) – bain de verre fondu. Pour les deux premières méthodes, nous montrons que l'utilisation d'une technique de raffinement local de maillage permet d'obtenir une erreur en norme  $L^2$  de l'ordre de  $\mathcal{O}(h_f)$  où  $h_f$  est le pas d'espace sur la grille la plus fine. De même, dans Introïni et al. (2014), nous illustrons l'ordre de convergence spatiale en  $\mathcal{O}(h^2)$  de la méthode PDF couplée à notre méthode d'interpolation linéaire sur un ensemble de cas tests analytiques (Poiseuille, Couette, cylindre en rotation, ...).

Ici, je me focalise sur deux points saillants particuliers : la comparaison des performances des méthodes JEBC et FE-ISI pour le calcul du bilan d'énergie du GV et l'apport de l'ordre deux en espace pour la simulation du creuset froid nucléarisé.

#### 4.3.1 Générateur de vapeur

Il s'agit de la validation sur un cas industriel, ici la simulation 3D du bilan d'énergie d'un GV, des méthodes FE-ISI et FV-JEBC (sous leurs acronymes anglais). Des IBC de type Robin permettent d'imposer les CL Dirichlet et Neumann du problème physique. La convergence en maillage a été étudiée avec un maillage du domaine fictif en forme de parallélépipède, comportant de 7 200 à 460 800 cellules, et englobant le domaine physique, cf. Figure 4.5. Ce dernier correspond à l'évaporateur de Clotaire, maquette d'un demi générateur de vapeur, cf. Section 1.3.

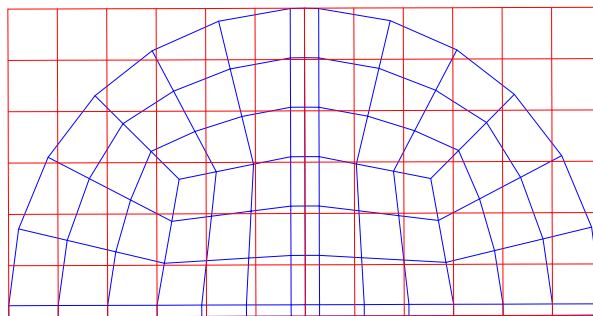


FIG. 4.5 – Maillages pour la simulation 3D par la méthode des domaines fictifs du bilan d'énergie de Clotaire, maquette d'un demi générateur de vapeur. Coupe horizontale du maillage du domaine fictif de calcul (en rouge) – de 7 200 à 460 800 cellules, grilles emboîtées. Le maillage bleu représente un maillage adapté à la géométrie du générateur de vapeur.

Ne disposant pas de solution analytique, la référence est un calcul EF (Génépi) sur un maillage non régulier adapté à la géométrie du générateur de vapeur et comportant 648 388 éléments. Dans les deux cas de discrétisation spatiale, l'erreur introduite par la méthode converge bien en  $\mathcal{O}(h)$  en moyenne en norme  $L^2$ , cf. Figure 4.6. Avec un maillage ayant un nombre raisonnable de cellules, l'erreur relative peut être aussi petite que  $10^{-3}$ . Dans le cas du calcul JEBC, l'erreur relative sur la puissance échangée entre le primaire et le secondaire est également de l'ordre de  $10^{-3}$ . Cette précision est tout à fait acceptable pour des applications industrielles, cf. Fig. 4.7.

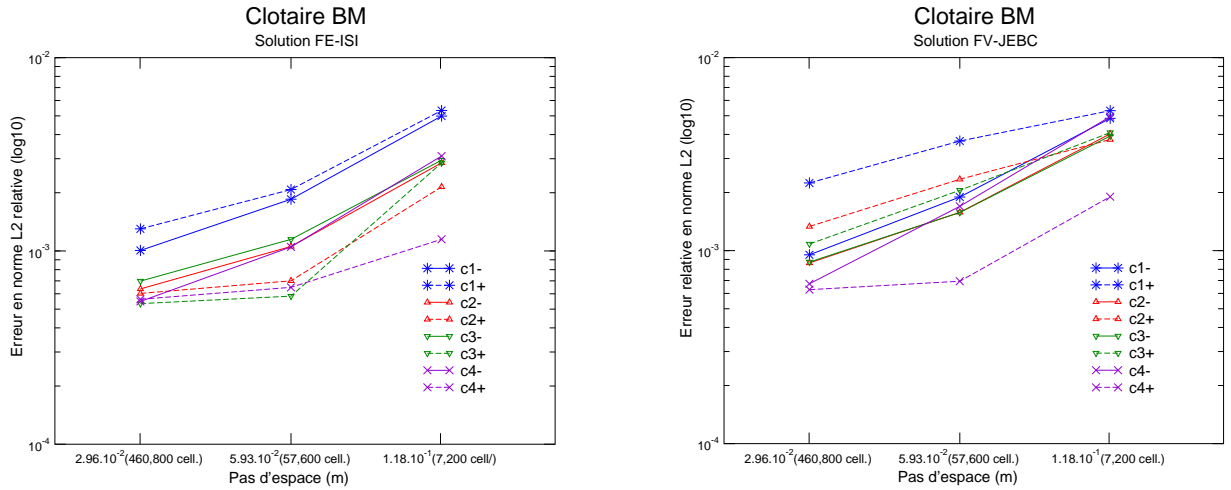


FIG. 4.6 – Résolution par la méthode des domaines fictifs du bilan d'énergie d'un générateur de vapeur. Erreur relative en norme  $L^2$  le long de profils verticaux d'enthalpie du mélange en fonction du pas d'espace  $h$ . A gauche : méthode FE-ISI (Ramière et al. 2007a), modélisation épaisse de la frontière immergée. A droite : méthode FV-JEBC (Ramière et al. 2007b), modélisation fine de la frontière immergée (approche "sans contrôle externe"). Pour cette méthode, l'erreur relative en norme  $L^2(\tilde{\Omega})$  vaut respectivement  $4,12 \cdot 10^{-3}$ ,  $2,16 \cdot 10^{-3}$  et  $1,40 \cdot 10^{-3}$  pour les trois maillages.

Malgré les coûts liés au domaine externe  $\Omega_e$  et à la faible optimisation du code pour ces tests GV, la réalisation d'un pas de temps pour le calcul FV-JEBC le plus fin nécessite un effort comparable (voire moindre) à celui nécessaire pour le calcul de référence : 24 secondes à comparer à 37,6 secondes.

#### 4.3.2 Creuset froid nucléarisé

La méthode PDF, utilisant notre approche moyennée pour l'interpolation linéaire, cf. Introïni et al. (2014), est appliquée ici à la simulation d'un bain de verre fondu agité mécaniquement ( $Re \approx 100$ ). On peut trouver un tel bain dans la technologie du creuset froid nucléarisé, développée par le CEA et AREVA dans le cadre du retraitement des déchets nucléaires, cf. Fig. 4.8. L'agitateur, les cannes de mesure et de *bullage* et les parois de la cuve sont modélisés par des frontières immergées. J'ai également réalisé des calculs thermohydrauliques où l'IBC en température est également prise en compte via la méthode PDF. De part l'aspect confidentiel de ces travaux, imposé par l'industriel, seule une communication les décrit à ce jour (Belliard et Introïni 2013).

Disposant de résultats de mesures de la vitesse du fluide par PIV dans une maquette en huile et de simulations Fluent (<http://www.ansys.com>) en maillage adapté à la géométrie du domaine de calcul – environ 1 million de cellules en AMR –, il est possible d'évaluer la pertinence de cette approche et de comparer les prédictions des simulations en fonction de l'ordre spatial de l'interpolation à la frontière immergée. Les mesures considérées ici ont été faites dans un plan vertical en  $y$ - $z$  situé à 20 % du rayon du creuset.



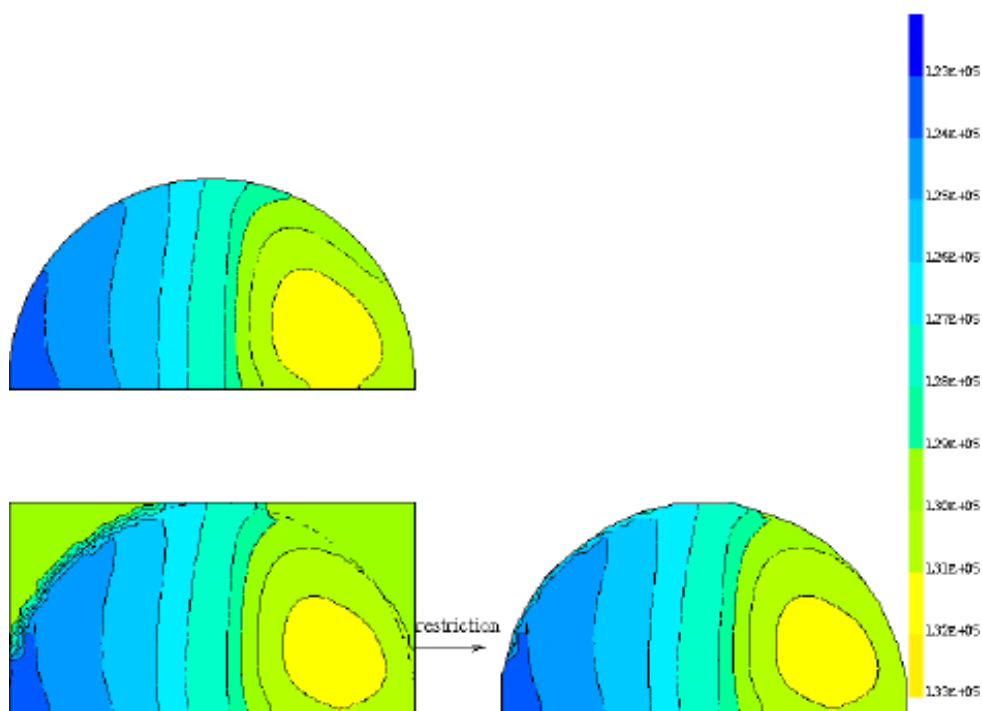


FIG. 4.7 – Résolution par la méthode FV-JEBC du bilan d'énergie d'un générateur de vapeur. Iso-valeurs de l'enthalpie spécifique secondaire en J/kg. Coupe à 5 m. En haut à gauche : calcul EF adapté Génèpi, maillage à 648 388 éléments. En bas : calcul domaine fictif, maillage à 460 800 cellules.  $\eta = 10^{-14}$ .

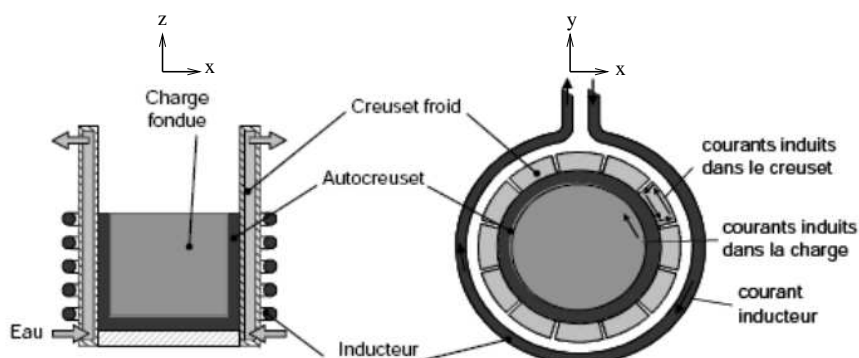


FIG. 4.8 – Modèle simplifié du dispositif du creuset froid nucléarisé. L'agitateur, les cannes de mesure et de bullage ne sont pas représentés ici.

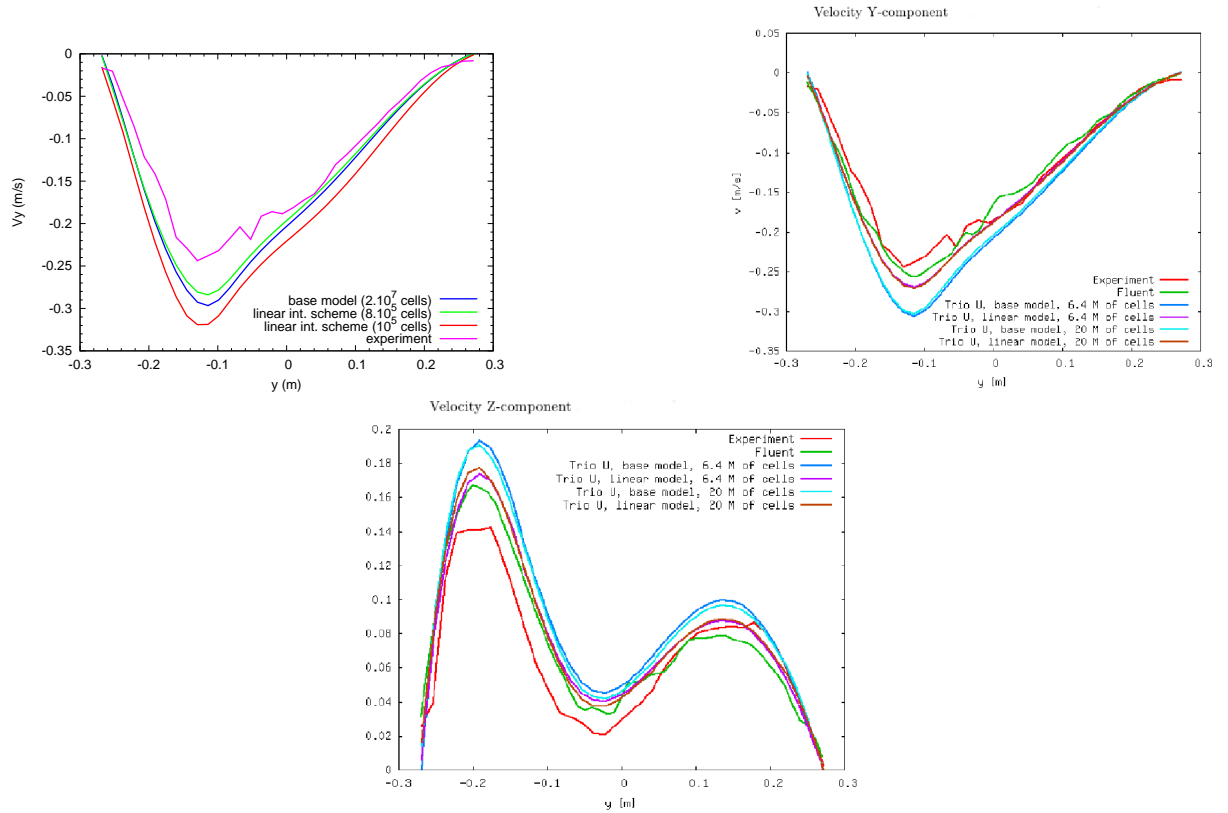


FIG. 4.9 – Profils des composantes  $y$  et  $z$  de la vitesse sur une ligne horizontale ( $z = 0,221 \text{ mm}$ ). Maillages de  $10^5$  à  $2 \cdot 10^7$  cellules. En haut : composante  $y$  ( $M \text{ cells} \equiv 10^6 \text{ cellules}$ ). En bas : composante  $z$ . Modèle de base (base model) : interpolation d'ordre 1 en espace. Modèle linéaire (linear model) : interpolation d'ordre deux en espace.

La figure Fig. 4.9 compare les résultats obtenus sur une ligne horizontale en  $y$  de ce plan de mesure, en fonction du nombre de cellules du maillage du domaine fictif. Avec 800 000 cellules, le modèle d'interpolation linéaire – ordre deux en espace – est plus précis que le modèle d'interpolation de base – affectation, ordre un en espace – avec 20 000 000 de cellules. Numériquement, le taux de convergence de l'erreur dans le cas linéaire est quasi double de celui obtenu dans le cas d'une simple affectation. A noter que le fait d'utiliser un maillage cartésien régulier facilite la mise en œuvre d'un solveur efficace rapide – multi-grilles géométrique – pour la résolution de la pression.

## CONCLUSION DU CHAPITRE

J'ai présenté le principe des méthodes de domaines fictifs et détaillé plus particulièrement trois d'entre elles pour lesquelles j'ai participé au développement : la méthode *Immersed Spread Interface*, ISI, à interfaces épaisses et les méthodes *Jump Embedded Boundary*, JEBC, et *Penalized Direct Forcing*, PDF, à interfaces fines. Elles ont été utilisées conjointement ou non avec des techniques d'AMR locales sur des maillages cartésiens réguliers. La méthode JEBC a l'avantage de pouvoir traiter les cas de frontière immergée, mais également d'interface immergée (fluide/poreux par exemple). Les applications ont été réalisées en éléments ou volumes finis sur des cas tests académiques en hydraulique et sur des configurations industrielles.

Les ordres de convergence de l'erreur en norme  $L^2$  ont numériquement été validés et sont conformes à ce qui est théoriquement attendu - ordre un ou deux en espace.

Dans les cas de mise en œuvre locale d'AMR, nous avons vérifié la convergence en  $\mathcal{O}(h_f^m)$  où  $h_f$  est le pas du maillage le plus fin et  $m$  l'ordre global de la méthode. Le déploiement de ce

type méthode pour la résolution de problèmes industriels est assez récent et les applications reportées ici soulignent les points forts : précision optimale du schéma numérique et solveurs linéaires efficaces sur des grilles cartésiennes, utilisation d'une structure de données peu coûteuse – tableau  $(i, j, k)$  –, pas d'étape de remaillage pour des obstacles en mouvement, ....

Parmi les perspectives, développées plus en détail dans la conclusion générale de ce mémoire, on peut citer la généralisation de la méthode JEBC à la résolution de l'ensemble des équations de bilan Eqs (1)-(3), l'augmentation de l'ordre de convergence spatiale – alternative au raffinement local – et la modélisation de l'interface fluide/poreux pour décrire le voisinage du faisceau de tubes ou de crayons combustibles. Pour la méthode PDF, on peut également citer la réduction des variations parasites des forces au voisinage de l'interface pour des obstacles en mouvement – phénomène non décrit ici et pouvant être important pour les faibles résolutions spatiales – et l'augmentation du nombre de Reynolds pour les applications.

# CONCLUSION GÉNÉRALE - PERSPECTIVES DE RECHERCHE

LES recherches présentées ci-dessus concourent à accroître la précision des simulations des composants nucléaires – cœur et générateur de vapeur, GV. Pour cela, le pas d'espace, local ou global, doit être le plus petit possible. L'augmentation judicieuse du nombre de mailles de calcul concourt à cela. Les maillages quotidiennement utilisés pour le calcul Généri d'un GV sont ainsi passés de quelques milliers, il y a 15 ans, à plusieurs centaines de milliers aujourd'hui. La qualité de la description de l'écoulement n'a plus rien à voir avec ce qu'on avait. Mais, pour qu'elle soit optimale, il faut plutôt viser quelques millions de cellules. L'amélioration de la puissance de calcul des ordinateurs est bien sûr une voie. Elle ne sera vraiment efficace qu'avec la recherche menée en simulation numérique.

Au cours de ce mémoire, j'ai développé des modèles concernant différentes thématiques : la décomposition de domaine, les méthodes multi-grilles, le raffinement local de maillage et les domaines fictifs, ayant toutes pour but d'augmenter la taille des maillages et la précision des calculs tout en réduisant le temps et la mémoire nécessaires à ceux-ci. Elles ont des implications importantes en terme d'applicatifs industriels – interaction fluide/structure, simulation diphasique fine, simulation de réacteur chimique, .... Les trois premières thématiques impliquent des méthodes itératives pour résoudre les équations non-linéaires de bilan. Il est ici plus intéressant de réaliser des lissage de celles-ci via des itérations de Picard relaxées (i.e. les itérations en temps de Généri).

- J'ai démontré l'efficacité de l'algorithme additif de type Dirichlet-Neumann que j'ai développé spécifiquement pour la simulation du régime stationnaire du GV. Il concerne le système complet des équations non-linéaires de bilan résolu sur un maillage globalement conforme ou non, avec une gestion dynamique des conditions limites aux interfaces. Les sous-domaines peuvent se recouvrir ou non. Dans le premier cas, la robustesse est accrue. Une grille grossière permet d'améliorer la convergence de la méthode. Tirant partie du préconditionnement naturel ainsi introduit et du parallélisme, sa mise en œuvre a permis de réaliser des calculs du GV à 1 000 000 de cellules et une parallélisation gros grains conduisant à un facteur d'accélération des calculs de 10 pour une efficacité parallèle de 50 %.
- Une méthode originale multi-grilles à cycle dynamique de type pseudo-FMG FAS, basée sur un algorithme séquentiel bi-grilles et généralisée à du multi-grilles en parallèle par une approche en damier, a été mise en place et testée avec succès dans le même contexte applicatif du GV. L'approche est particulièrement intéressante lorsque le nombre de degrés de liberté est grand – typiquement  $10^5$  – : accélération des calculs d'un facteur de l'ordre de 3 sur 3 grilles. Avec un nombre adéquat de grilles d'agglomération, la convergence de la méthode est quasiment indépendante du nombre de cellules. Notons toutefois l'importance du choix des paramètres de l'algorithme (relaxation, nombre d'itérations de lissage, ...) pour optimiser les résultats.
- J'ai décrit la méthode de raffinement local de type LDC que j'ai développée pour la simulation des GV. Cette version originale correspond à un algorithme parallèle dont le solveur a été remplacé par un lisseur et s'applique à un système d'équations non linéaires. Les conditions aux limites, CL, retenues sont localement adaptées pour prendre en compte la présence de vortex de fluide. L'application à la simulation du GV montre

une forte cohérence entre les résultats du domaine principal et ceux du domaine de raffinement, ainsi qu'un gain important dans la discrétisation spatiale locale pour un coût bien moindre que dans le cas d'un raffinement uniforme.

- Enfin, j'ai détaillé les trois méthodes de domaines fictifs dont j'ai été l'initiateur (PDF) ou au développement desquelles j'ai participé (LDC-ISI et FIC-JEBC). Des applications, réalisées en éléments ou volumes finis sur des cas tests académiques en hydraulique et sur des configurations industrielles (GV et bain de verre), ont permis de vérifier les ordres de convergence attendus pour l'erreur en norme  $L^2$ . La méthode de raffinement local FIC a été adaptée à la problématique d'une frontière immergée. De façon générale, la mise en œuvre de raffinement adaptatif (local) de maillage, AMR, sur des maillages cartésiens réguliers permet d'atteindre une erreur fonction du plus petit pas d'espace du raffinement.

Si ces différents axes de recherche ont été présentés indépendamment les uns des autres, il est clair qu'ils ont des points en commun et sont à mettre en synergie pour conduire à des simulations les plus performantes possibles. Ceci est attesté tout au long de ce mémoire : les mêmes méthodes peuvent aussi bien intervenir dans la partie *haute* du processus de simulation (schéma global de calcul) que dans la partie *basse* de celui-ci (résolution d'un système linéaire). C'est en particulier le cas des techniques de décomposition de domaine ou multi-grilles. Les outils, élaborés dans un contexte donné, sont également des atouts pour le développement de méthodes intervenant dans un tout autre contexte. Par exemple, l'analyse des CL des frontières immergées pour les méthodes de domaines fictifs peuvent se comprendre à la lumière des méthodes mises en œuvre en décomposition de domaine.

Il est remarquable de noter que les maillages cartésiens réguliers, dont l'utilisation accompagna le début de la mécanique des fluides numérique avant d'être supplantés par les maillages non structurés pour les problèmes à géométrie complexe, reviennent sur le devant de la scène avec les méthodes de domaines fictifs. Les travaux mentionnés dans ce mémoire confirment leurs grand intérêt, déjà démontré au niveau académique, et leurs potentialités pour des simulations industrielles. Elles permettent une mise en œuvre optimale des schémas de discrétisation spatiale, des techniques de décomposition de domaine, de résolution multi-grilles, de raffinement local de maillage ou de type multi-résolution ... Cependant, ces méthodes numériques, appliquées à mon domaine professionnel, sont encore largement ouvertes. En particulier, dans la continuité directe de mon travail, j'envisage les perspectives de recherche suivantes<sup>1</sup>.

- Mon algorithme de décomposition de domaine inclut des CL adaptées de type Dirichlet ou Neumann. On peut s'intéresser à des CL de type Robin. Chaque CL fait alors intervenir les variables et leurs dérivées normales, voire tangentielles comme pour les CL optimales – *Optimized Schwarz Methods* – obtenues pour certains problèmes de diffusion-convection, cf. par exemple Dolean et al. (2002). Un point ouvert est l'évaluation de l'impact de ce changement de CL sur la convergence de la méthode, en particulier dans le cas d'un système d'EDP fortement non linéaires, lissées au cours d'itérations de Picard.
- D'un point de vue applicatif GV, les algorithmes développés de type FAS ou LDC utilisent des maillages emboîtés. Cette contrainte serait à relâcher pour les cellules bordant la frontière du domaine de calcul. En effet, la modélisation linéaire par morceau de la géométrie cylindrique de celle-ci est variable suivant le pas d'espace considéré. Cela nécessite d'adapter les algorithmes à des maillages localement non emboîtés.
- La résolution du bilan d'énergie du GV en domaines fictifs par les méthodes FE-ISI et FV-JEBC a mis en évidence l'intérêt de cette approche. Il est maintenant nécessaire de généraliser à la résolution complète du système d'équations de bilan du GV. L'approche

<sup>1</sup>Décrites ici suivant l'ordre de la présentation des thématiques.

JEBC semble être à privilégier de part sa souplesse d'utilisation - frontière ou interface<sup>2</sup>. La formulation vectorielle de JEBC pour Stokes-Brinkman a été abordée dans Angot (2010). Dans ce contexte, la résolution de Navier-Stokes par un algorithme de type projection est une question ouverte, tout comme l'accroissement de l'ordre de la convergence en espace (ordre deux) – alternative au raffinement local de maillage.

- Un autre point intéressant est la transition fluide/poreux au voisinage du faisceau de tubes ou de crayons, décrit comme un domaine poreux. Contrairement aux couplages de modèles Stokes/Brinkman ou Stokes/Darcy, les modélisations GV ou cœur, n'introduisent aucune conditions de saut à l'interface entre une cellule libre et une autre poreuse. Seule la proportion de surface ou de volume occupée par le fluide est pris en compte. Par ailleurs, la qualification des simulations du GV dans cette zone – celle des grands cintres – est encore ouverte. La méthode JEBC, permettant en particulier de tenir compte d'interfaces de type Stokes/Brinkman ou Stokes/Darcy (Angot 2011), pourrait fournir un cadre à l'introduction d'un modèle *effectif* de saut à la transition fluide libre/faisceau.
- Concernant l'AMR en domaine fictif, le fait de disposer de grilles cartésiennes régulières permet d'envisager l'utilisation de techniques multi-résolution (Müller 2002), d'une part pour la détection automatique des régions à forte variation des variables et des indicatrices liées aux obstacles – voire à des interfaces – et d'autre part pour la décomposition des variables en fonctions de forme et de détail (compression des données et adaptabilités).
- Toujours en domaine fictif, la méthode PDF donne des résultats tout à fait corrects en frontière fine et pour un coût réduit en terme de re-engineering de code. Toutefois, son application au cas d'obstacles en mouvement met en lumière des variations parasites des forces au voisinage de la frontière immergée – essentiellement la pression. C'est également vrai pour la version non pénalisée, DF. Ceci peut être une source de pollution lors de calculs d'interactions fluide-solide. Actuellement, nous étudions une version régularisée de celle-ci ...
- D'une façon générale, les approches de type frontière ou interface immergée n'échappent pas à la nécessité de résoudre en espace la couche limite éventuellement présente dans le voisinage de celle-ci. C'est une réelle limitation lorsque le nombre de Reynolds augmente – au delà de quelques centaines. Dans la Littérature, on utilise des techniques AMR (Iaccarino et Verzicco 2003) ou des modélisations simplifiées en proche paroi (Yang et Balaras 2006). Dans quelle mesure ne pourrait-on pas s'inspirer de ce qui est fait en modélisation de la turbulence avec des lois de parois (Iaccarino et Verzicco 2003, Posa et Balaras 2013) ? La problématique reste ouverte.
- Enfin, en ouvrant le champ thématique, les méthodes développées ici ont en commun le fait de s'appuyer sur des solveurs de type elliptique (méthodes de projection) initialement introduits pour les écoulements incompressibles et généralisés aux fluides dilatables – masse volumique variable indépendamment de la pression. Ils rendent les services escomptés, mais présentent en particulier deux limitations. La première est que l'inversion de la matrice en pression est extrêmement coûteuse dans le cas d'un grand nombre de degrés de liberté<sup>3</sup>. A ce propos, la méthode de projection *Vector Penalty Projection*, VPP, a été récemment introduite par Caltagirone et Breil (1999), Angot et al. (2008; 2011). Ces travaux rapportent des inversions extrêmement rapides de la matrice pression – quelques itérations de la méthode ILU-BiCGStab –, moyennant un contrôle moindre de la conservation de la masse. Il semblerait intéressant d'évaluer ses potentialités dans notre contexte. Cela est actuellement en cours pour des variables colocalisées en maillage

<sup>2</sup>Par ailleurs, de part leurs propriétés de conservation, les discrétisations spatiales de type volumes finis sont de plus en plus plébiscitées en mécanique des fluides industrielle et s'accordent tout à fait avec la méthode JEBC.

<sup>3</sup>On peut passer 90% du temps de calcul dans cette résolution.

cartésien (Belliard 2014). La seconde est qu'ils sont généralement peu performants en compressible alors que les études liées à la sûreté nucléaire peuvent balayer une large gamme de régimes d'écoulement : de l'incompressible en fonctionnement nominal au compressible en cas de dépressurisation brutale. A ce propos, un solveur elliptique *tout Mach*, tel celui rapporté dans (Herbin et al. 2012; 2013), peut répondre à ce cahier des charges et est en cours d'évaluation pour les écoulements diphasiques des composants nucléaires.

# ANNEXES

A

## SOMMAIRE

A.1	UNE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE BILAN DU MODÈLE HEM . . . . .	81
A.2	MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE . . . . .	83
A.3	NOTIONS LIÉES AU PARALLÉLISME . . . . .	85
A.4	PRÉCISION DES CALCULS GV EN DÉCOMPOSITION DE DOMAINE . . . . .	86
A.5	MÉTHODES MULTI-GRILLES ALGÈBRIQUES . . . . .	88
A.6	PRÉCONDITIONNEUR ONDELETTE/MULTI-RÉSOLUTION . . . . .	89
A.7	ANALYSE DE L'ALGORITHME MULTI-GRILLES PARALLÈLE EN DAMIERS . . . . .	90
A.8	ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DE L'ALGORITHME BI-GRILLES PSEUDO-FMG FAS . . . . .	91





## A.1 UNE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE BILAN DU MODÈLE HEM

Dans Génepi, on recherche un régime stationnaire comme la limite d'un pseudo-transitoire. La résolution du système d'équations (1)-(4) est abordée via une technique de *splitting* dans laquelle le bilan d'énergie du fluide primaire, celui du fluide secondaire, le bilan de QDM et le bilan de masse du fluide secondaire sont successivement résolus dans cet ordre. Une boucle en temps permet de linéariser les expressions par des itérations de Picard (Ferziger et Peric 1996). Vis-à-vis des itérations internes des solveurs linéaires, ces itérations en temps sont à voir comme des itérations externes. De fait, la résolution d'une équation instationnaire non linéaire, linéarisée en temps par des itérations de Picard sur l'opérateur  $\mathcal{P}$  s'écrit (Euler implicite) :

$$\frac{\zeta^{n+1}}{\delta t} + \mathcal{P}(\zeta^n) \zeta^{n+1} = \frac{\zeta^n}{\delta t} + b \quad (\text{A.1})$$

avec  $b$  un second membre et  $\zeta$  l'inconnue, revient à relaxer les itérations de Picard d'une équation stationnaire :

$$\frac{\mathcal{P}(\zeta^n)}{\alpha_p} \zeta^{n+1} = b + \frac{1 - \alpha_p}{\alpha_p} \mathcal{P}(\zeta^n) \zeta^n \quad (\text{A.2})$$

où  $\alpha_p$  est le coefficient de relaxation. La correspondance locale entre le pas de temps et  $\alpha_p$  s'écrit formellement :  $\alpha_p = \frac{\mathcal{P}(\zeta^n)\delta t}{1 + \mathcal{P}(\zeta^n)\delta t}$  (Ferziger et Peric 1996).

De plus, dans le logiciel Génepi, le terme  $\partial_t \beta \rho$  a été éliminé du bilan de masse du fluide secondaire. Cela est relié au fait que l'on néglige les ondes de taux de vide dans le générateur de vapeur et que l'on cherche un régime stationnaire. Ce dernier est considéré comme atteint si on vérifie, pour chaque variable  $\xi$  ( $T_p$ ,  $H$ ,  $\mathbf{V}$  et  $P$ ), le critère suivant sur la variation relative temporelle par unité de temps :

$$\frac{|\xi^n - \xi^{n-1}|_{L^2}}{|\xi^n|_{L^2} \delta t} < \epsilon_{st} \quad (\text{A.3})$$

avec  $\delta t$  le pas de temps,  $|\cdot|_{L^2}$  la norme  $L^2$  discrète,  $n \in \mathbb{N}^{*+}$  le numéro d'itération en temps et  $\epsilon_{st}$  un critère fourni par l'utilisateur (par défaut  $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ).

Par ailleurs, cela permet d'appliquer des schémas de résolution de type incompressible pour Navier-Stokes : ici une méthode de projection incrémentale (Chorin 1968, Temam 1968, Goda 1979). Cela correspond à une prédiction de la vitesse  $\mathbf{V}^*$  suivie d'une projection dans un espace à divergence nulle permettant de corriger cette vitesse prédite et de calculer la pression  $P^{n+1}$ . En réalisant une semi-discrétisation en temps et en ne précisant les instants que pour la vitesse et la pression, on a :

$$\beta \rho \frac{\mathbf{V}^* - \mathbf{V}^n}{\delta t} + \beta \mathbf{G}^n \cdot \nabla \mathbf{V}^* - \nabla \cdot \beta \mu_T (\nabla \mathbf{V}^* + \nabla^T \mathbf{V}^*) + \beta \bar{\Lambda} \mathbf{V}^* = \quad (\text{A.4})$$

$$- \beta \nabla P^n + \beta \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot (\beta x(1-x) \rho \mathbf{V}_R \otimes \mathbf{V}_R),$$

$$\beta \rho \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\delta t} = - \beta \nabla (P^{n+1} - P^n), \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \delta t \beta \nabla (P^{n+1} - P^n) = \nabla \cdot \beta \rho \mathbf{V}^*. \quad (\text{A.6})$$

De fait, l'équation de bilan de QDM est de type elliptique alors que celle du bilan d'enthalpie a un caractère hyperbolique plus marqué. La pression initiale  $P^0$  est obtenue, à partir d'un flux de masse initial  $\vec{G}^0$  (Gresho et al. 1984), par la technique *Consistent Pressure Poisson Equation*, CPPE, de Gresho (1991).

Le schéma de discrétisation en temps est celui de Crank-Nicholson. Il est semi-implicite car la diffusion et le frottement sont implicites, tandis que l'advection et les termes de dérive sont

généralement pris en explicite. Le pas de temps du calcul peut être alors 3 à 5 fois plus grand que le pas de temps critique. La discrétisation spatiale est faite par la méthode des éléments finis de type Q1 (flux de masse, enthalpie ; fonctions de forme notées  $\varphi$ ) et Q0 (pression ; fonctions de forme notées  $\psi$ ) en trois dimensions d'espace. Ce couple (vitesse, pression) ne vérifie pas la condition inf-sup<sup>1</sup>, mais la forte diffusion introduite par des valeurs importantes de  $\mu_T$  et  $\chi_T$  stabilise les calculs<sup>2</sup>. Par ailleurs, la température du fluide primaire  $T_p$  est discrétisée par des éléments finis en 1D de type P1. Généralement, pour les *coefficients* physiques des équations (masse volumique, viscosité, ...), on utilise des valeurs constantes par éléments (Q0).

**Remarque A.1** *Le couplage entre les maillages 1D des lignes primaires – une ligne primaire représente un certain nombre de tubes primaires et non un seul – et le maillage 3D est fait via une technique de moyenne arithmétique. Pour chaque élément 3D du secondaire, on moyenne les températures des noeuds du maillage primaire 1D qui y sont inclus. Ainsi, concernant Eq. (5), les termes  $h_{eq}$  et  $T_w$  sont d'abord discrétisés sur les éléments finis Q0 3D, puis affectés aux noeuds du maillage curviligne primaire inclus. Après la résolution de Eq. (4), la température primaire  $T_p$  est moyennée sur le maillage secondaire, afin de calculer le terme source  $Q$  qui est pris en compte dans Eq. (3).*

Les opérateurs de diffusion sont discrétisés de façon centrée, ainsi que ceux de convection. Pour remédier à l'instabilité introduite par la discrétisation centrée des termes explicites de convection, on applique une correction de type BTD (Gresho et al. 1984). Cela consiste à rajouter un terme de diffusion numérique aux équations de bilan. Par exemple pour l'enthalpie, il s'écrit :

$$\operatorname{div}(\beta\rho\frac{3}{2}\delta t\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}\nabla H). \quad (\text{A.7})$$

Cette correction, issue d'un développement de Taylor en temps, a une formulation similaire à la correction SUPG bien connue (Brooks et Hughes 1982) :

$$\operatorname{div}(\beta\rho\frac{ch}{|\mathbf{V}|}\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}\nabla H) \quad (\text{A.8})$$

$c \in \mathbb{R}^+$  et  $h$  une taille caractéristique de maille,

si on remplace la dépendance en pas d'espace par une dépendance en pas de temps<sup>3</sup>. A noter également, que pour le calcul des matrices élémentaires, les intégrations ne sont pas exactes, mais sous-intégrées puis corrigées par la méthode de Hourglass.

Les systèmes linéaires des bilans sont lissés<sup>4</sup>, au cours des itérations en temps, par une méthode de Krylov (Gradient Conjugué ou Gradient Conjugué Carré, dit CGS en anglais) pré-conditionnée par la diagonale ou par une factorisation incomplète.

Le système linéaire de l'étape de projection des vitesses prédites est résolu par une méthode directe (factorisation  $LU$  ; matrice au format "ligne de ciel") afin de garantir  $\nabla.\beta\mathbf{G} = 0$  à la précision machine – indispensable pour ne pas créer de masse parasite dans les volumes de contrôle. Un des facteurs limitant dans nos simulations est l'inversion de ce système linéaire. Le calcul peut passer 90% du temps CPU dans cette inversion. La limite maximale, pour que la matrice tienne en mémoire, correspond à un maillage à 150 000 éléments :  $\approx 1,9$  Go en architecture 32 bits. Il est toujours difficile de paralléliser un code ancien comme Génepi et utilisé couramment dans l'industrie. Toutefois, via une interface logicielle vers des bibliothèques de calcul

<sup>1</sup>Voir par exemple, David Griffiths et David Silvester (2011) : "Unstable modes of the Q1-P0 element"; <http://www.manchester.ac.uk/mims/eprints>.

<sup>2</sup>Pour un écoulement dont la viscosité turbulente  $\mu_T$  est modélisée par Schlichting (1968), le Reynolds est donné par l'inverse du coefficient  $a$ , soit environ 20.

<sup>3</sup>Ce qui se fait naturellement si on a une condition de stabilité de type CFL :  $\delta t \sim s \min(\frac{h}{|\mathbf{V}|})$  où  $s$  est un réel positif.

<sup>4</sup>En effet, à cause des importantes non linéarités, une résolution des systèmes linéaires seraient une perte de temps, voire une source d'instabilités.

parallèle telles PETSc (Balay et al. 2013) ou Hypre (Falgout et co workers) – ici l’interface *Numerical Platon* (Sécher et al. 2009) –, la mise en œuvre de parallélisme massif permet de traiter des cas relativement gros. Il est par exemple possible, en utilisant une méthode itérative de gradient conjugué préconditionné par la diagonale sur une matrice au format *Compact Storage Row*, CSR, de traiter un problème de 500 000 éléments avec 1,7 Go de mémoire. La matrice est assemblée en séquentiel et la résolution est faite en parallèle. L’efficacité du calcul parallèle est de l’ordre de l’unité pour 16 processeurs, cf. Belliard et Sécher (2006) ou Sécher et al. (2009). Même si les progrès constants de l’informatique – multi-cœurs en architecture 64 bits par exemple – repoussent les limites, la résolution de la pression reste toujours le poste le plus coûteux.

## A.2 MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE

Le but initial de H. Schwarz (Schwarz 1870) était de calculer la solution d’un problème impliquant un domaine de calcul  $\Omega$  de forme composite à l’aide de méthodes spectrales, cf. Fig. A.1 à gauche :

$$\mathcal{L}(u) = b \text{ sur } \Omega \text{ avec CL sur } \partial\Omega \quad (\text{A.9})$$

avec  $\mathcal{L}$  un opérateur de type Lagrangien. Son algorithme itératif consiste à décomposer le domaine de calcul en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  se recouvrant. A chaque itération  $k \in \mathbb{N}$  et successivement pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$ ,  $i = 1 \dots 2$ , on met à jour les Conditions aux Limites, CL, de Dirichlet données par l’autre sous-domaine  $\Omega_j$ ,  $j \neq i$  et on résout par une méthode appropriée :

$$\mathcal{L}_1(u_1^k) = b_1 \text{ sur } \Omega_1 \quad (\text{A.10})$$

$$\text{avec CL du pb initial sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \quad (\text{A.11})$$

$$\text{et } u_1^k = u_2^{k-1} \text{ on } (\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega) \cap \Omega_2, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{L}_2(u_2^k) = b_2 \text{ sur } \Omega_2 \quad (\text{A.13})$$

$$\text{avec CL du pb initial sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \quad (\text{A.14})$$

$$\text{et } u_2^k = u_1^* \text{ on } (\partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega) \cap \Omega_1, \quad (\text{A.15})$$

où  $\mathcal{L}_i$  est une restriction de  $\mathcal{L}$  à  $\Omega_i$ .

L’algorithme de point fixe de Schwarz, cf. Fig. A.1 à droite au centre, peut être réalisé en séquentiel  $u_1^* = u_1^k$  ou en parallèle  $u_1^* = u_1^{k-1}$  et on peut faire un lien avec respectivement les méthodes itératives de Gauss-Seidel et de Jacobi. Dans cette approche, le recouvrement des sous-domaines est un facteur clef, ainsi que le nombre de sous-domaines. On peut caractériser un sous-domaine  $\Omega_i$  par son *diamètre*  $H_i$  et par une mesure du recouvrement minimal  $\delta_i$  avec les autres sous-domaines voisins  $\Omega_j$ ,  $j \neq i$  tels que  $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ . On montre que la convergence de l’algorithme de Schwarz est en  $\mathcal{O}(\frac{1}{H_i^2} \frac{H_i}{\delta_i})$ , cf. Lions (1988), Le Tallec (1994) et que, pour un recouvrement relatif donné  $\frac{H_i}{\delta_i}$ , elle se détériore en  $1/H_i^2$  lorsque le nombre de sous-domaines croît<sup>5</sup>. De même, la convergence se détériore si  $\delta_i \rightarrow 0$ ; i.e. décomposition de domaine sans recouvrement. Malgré l’intérêt de sa mise en œuvre aisée, on peut reprocher à la méthode originale de Schwarz les dépendances en  $\frac{H_i}{\delta_i}$  et en  $1/H_i^2$ , ainsi que le fait qu’un certain nombre de degrés de liberté sont dupliqués (réduction des performances).

<sup>5</sup>Il existe des techniques d’accélération de la convergence et de correction de la dépendance en  $\mathcal{O}(\frac{1}{H_i^2} \frac{H_i}{\delta_i})$ . En particulier, via l’utilisation d’une grille grossière. Un exemple est donné à la Section 2. La convergence est alors en  $\mathcal{O}(\frac{H_i}{\delta_i})$ .

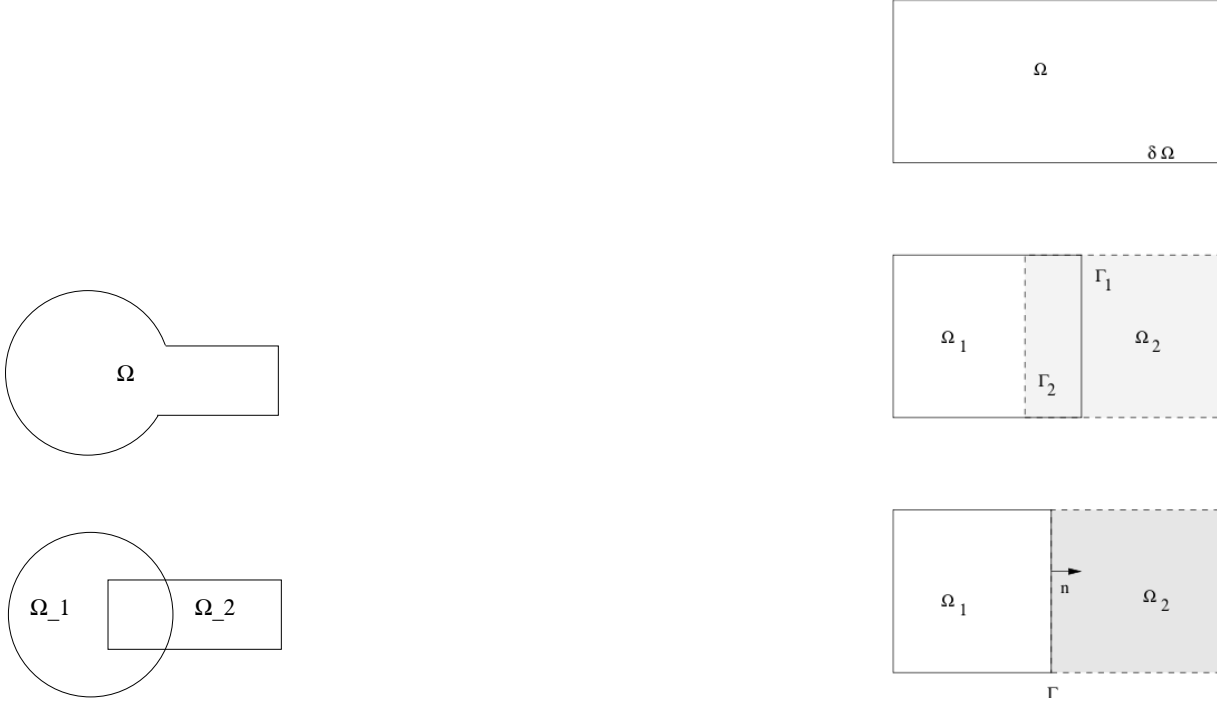


FIG. A.1 – Décomposition du domaine. A gauche : le problème de Schwarz sur  $\Omega$  (haut) résolu par décomposition de domaine en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec recouvrement (bas). Sur chaque forme simple, disque ou rectangle, on peut appliquer une méthode spectrale à base de fonctions de Bessel ou de Fourier. A droite : décomposition du domaine  $\Omega$  (haut) en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec recouvrement (milieu) ou sans recouvrement (bas).

De fait, il existe une autre approche largement répandue – le problème à l’interface – qui consiste à réaliser la décomposition du domaine  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_s} \Omega_i$  en  $N_s$  sous-domaines sans recouvrement (Le Tallec 1994), cf. Fig. A.1 à droite en bas. Chaque sous-problème local, i.e. Eq. (A.10) ou Eq. (A.13) par exemple, peut être écrit de la façon suivante sur  $\Omega_i$  :

$$\mathcal{L}_i(u_i) = b_i \text{ sur } \Omega_i \quad (\text{A.16})$$

$$\text{avec C.L. du pb initial sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \quad (\text{A.17})$$

$$\text{et Trace}(u_i) = \bar{u} \text{ on } \Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (\text{A.18})$$

où  $\bar{u}$  est la trace de la solution sur le squelette  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N_s} \Gamma_i$ , i.e. l’ensemble des frontières entre les sous-domaines. Si on procède à la partition des degrés de liberté de  $\Omega_i$  en regroupant ceux appartenant à  $\Gamma_i$  (i.e. la trace de  $u_i$  sur  $\Gamma_i$ ) et ceux appartenant à l’intérieur du sous-domaine  $i$ , on a :

$$\begin{pmatrix} A_{ii} & A_{i\Gamma_i} \\ A_{\Gamma_i i} & A_{\Gamma_i \Gamma_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i \\ b_{\Gamma_i} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

La trace  $\bar{u}$  étant connue, on a :

$$u_i = A_{ii}^{-1} \{b_i - A_{i\Gamma_i} \bar{u}\}. \quad (\text{A.20})$$

En condensant les degrés de liberté à l’interface  $\Gamma_i$ , on a également la relation :

$$S_i \bar{u} = b_{\Gamma_i} - A_{\Gamma_i i} A_{ii}^{-1} b_i \quad (\text{A.21})$$

où  $S_i$  est la matrice du complément de Schur local – version discrète de l’opérateur de Steklov-Poincaré – :

$$S_i = A_{\Gamma_i \Gamma_i} - A_{\Gamma_i i} A_{ii}^{-1} A_{i \Gamma_i}. \quad (\text{A.22})$$

Si on généralise cette analyse à l'ensemble des sous-problèmes, on a – par exemple pour  $N_s = 2$ , cf. Fig. A.1 à gauche en bas – :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma_1} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{2\Gamma_2} \\ \hline A_{\Gamma_1 1} & 0 & A_{\Gamma_1 \Gamma_1} & 0 \\ 0 & A_{\Gamma_2 2} & 0 & A_{\Gamma_2 \Gamma_2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{\Gamma_1} \\ u_{\Gamma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_{\Gamma_1} \\ b_{\Gamma_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

où  $u_i, i = 1 \dots N_s$  sont les degrés de liberté intérieurs sur  $\bigcup_{i=1}^{N_s} \Omega_i \setminus \Gamma$  et  $u_{\Gamma_i}, i = 1 \dots N_s$  les degrés de liberté sur  $\Gamma$ . Le problème à l'interface  $\Gamma$ , s'écrit :

$$Su_\Gamma = \chi \quad (\text{A.24})$$

où

$$\begin{cases} S &= \sum_{i=1}^{N_s} \bar{R}_i^T S_i \bar{R}_i \\ \chi &= \sum_{i=1}^{N_s} \bar{R}_i^T (b_{\Gamma_i} - A_{\Gamma_i i} A_{ii}^{-1} b_i). \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$S$  est la matrice du complément de Schur globale,  $\chi$  la balance de flux sur  $\Gamma$  et  $\bar{R}_i$  la restriction de la variable  $u_\Gamma$  sur  $\Gamma_i$ .

En théorie, la résolution de Eq. (A.24), suivie de la résolution en parallèle des problèmes locaux sur  $\Omega_i, i = 1 \dots N_s$ , permet de solutionner le problème initial. Mais le problème à l'interface peut être difficile à résoudre car mal conditionné. On montre que le conditionnement est en  $\mathcal{O}(\frac{1}{H^2} [1 + \max \frac{H_i}{h_i}])$  avec  $h_i$  et  $H_i$  le pas d'espace et le diamètre du sous-domaine  $\Omega_i$  et  $H$  le diamètre des sous-domaines (Le Tallec 1994). Il peut être préférable de préconditionner Eq. (A.24) via une méthode d'itérations par sous-domaine (Quarteroni et Valli 1996). Pratiquement, il s'agit de résoudre une série de sous-problèmes concourant à la résolution du problème à l'interface. Suivant l'approche retenue, on parle de préconditionnement de type Dirichlet-Neumann (Bjørstad et Widlund 1986), Neumann-Neumann (Bourgat et al. 1989) ou encore Robin-Robin (Lions 1990).

Une méthode d'itérations par sous-domaine est décrite d'une façon générale par des itérations de Richardson sur Eq. (A.24) préconditionnées par la matrice  $C$  :

$$C(u_\Gamma^{k+1} - u_\Gamma^k) = \theta(\chi - Su_\Gamma^k). \quad (\text{A.26})$$

Ici,  $\theta$  est un paramètre choisi pour que la méthode converge. La méthode Dirichlet-Neumann consiste à préconditionner par l'une des matrices du complément de Schur local, par exemple :  $C = \bar{R}_2^T S_2 \bar{R}_2$  (Marini et Quarteroni 1989). La convergence des  $u_\Gamma^k$  est indépendante du pas d'espace (Quarteroni et Valli 1996). De même pour la méthode Neumann-Neumann pour laquelle on a :  $C^{-1} = \sum_{i=1}^{N_s} \bar{D}_i S_i^{-1} \bar{D}_i^T$  avec  $D_i$  la restriction des flux sur  $\Gamma_i$  (Bourgat et al. 1989).

Sans correction de grille grossière, ce préconditionnement conduit à des conditionnements en  $\mathcal{O}(\frac{1}{H^2} (1 + \log \frac{H}{h})^2)$ , cf. Le Tallec (1994)<sup>6</sup>.

## A.3 NOTIONS LIÉES AU PARALLÉLISME

Nous définissons ici les notions d'accélération parallèle (*speed-up* en anglais), d'efficacité parallèle et d'extensibilité parallèle (*scalability* en anglais ou *scalabilité* en français).

<sup>6</sup>Ici encore, l'ajout d'une grille grossière permet d'obtenir une dépendance en  $\mathcal{O}((1 + \log \frac{H}{h})^2)$ .

La qualité d’une exécution en parallèle d’un algorithme peut se mesurer d’une part via le *speed-up* – ou *scalabilité* forte –  $Sp(N, ndof)$  et l’efficacité parallèle  $E_p(N, ndof)$ . Ces indicateurs sont définis en considérant un nombre fixe de degrés de liberté (ddl)  $ndof$ . Si  $T_s(ndof)$  est le temps de l’algorithme séquentiel (le plus rapide) avec un seul processus et  $T_p(N, ndof)$  le temps de l’algorithme parallèle avec  $N$  processus, on a :

$$S_p(N, ndof) = \frac{T_s(ndof)}{T_p(N, ndof)}, \quad (A.27)$$

et

$$E_p(N, ndof) = \frac{S_p(N, ndof)}{N}. \quad (A.28)$$

Ils indiquent comment évolue le temps nécessaire à la résolution en parallèle d’un problème de taille donné en fonction du nombre de processus. D’autre part, la notion de *scalabilité* faible  $SC_p(N, ndof)$  est définie en considérant un nombre fixe de ddl,  $ndof$ , par processus. Si  $T_s(ndof)$  est le temps de l’algorithme séquentiel avec un seul processus pour  $ndof$  degrés de liberté et  $T_p(N, N \cdot ndof)$  le temps de l’algorithme parallèle avec  $N$  processus pour  $N \cdot ndof$  degrés de liberté, on a :

$$SC_p(N, ndof) = \frac{T_s(ndof)}{T_p(N, N \cdot ndof)}. \quad (A.29)$$

La scalabilité mesure la faculté d’un algorithme parallèle à résoudre en un temps donné des problèmes de plus en plus gros en augmentant conjointement le nombre de processus.

Enfin, introduisons la notion de granularité du découpage. Elle quantifie le rapport entre le nombre de ddl internes – donc l’effort de calcul – et le nombre de ddl externes des frontières communicantes – donc l’effort de communication. Plus le découpage augmente, plus la granularité diminue et les communications augmentent au détriment des calculs.

## A.4 PRÉCISION DES CALCULS GV EN DÉCOMPOSITION DE DOMAINE

D’une façon générale, la partition du domaine de calcul en sous-domaines se recouvrant ou non n’a pas d’impact sensible sur la précision du calcul.

Tout d’abord, je compare ici la précision des simulations de la maquette Clotaire via des indicateurs globaux pris en régime stationnaire comme :

- le taux de vide moyen en sortie ( $\alpha_s$ , teste la valeur de l’enthalpie en sortie),
- le débit de masse en sortie ( $Q_s = \int_s \beta \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$ , teste la conservation de la masse),
- le titre thermodynamique moyen en entrée ( $x_{bc}$  et  $x_{bf}$ , teste la valeur de la pression en bas de l’évaporateur),
- la température primaire en sortie ( $T_{p_s}$ , teste la valeur de la puissance échangée entre le primaire et le secondaire).

La moyenne d’une quantité, en entrée ou en sortie, est définie par l’intégrale de surface de cette quantité divisée par l’aire du support d’intégration pondérée par la porosité.

La Table A.1 donne des exemples typiques de la précision que l’on peut obtenir dans le cas d’une partition avec recouvrement ( $\epsilon_{st} = 10^{-5} s^{-1}$  et  $n_{cp} = 20$ , définis à la Section 1.2.2). Pour ces simulations, le pas de temps  $\delta t$  est celui du calcul de référence – i.e. sans décomposition de domaine. L’écart relatif maximal est de l’ordre de 2 %.

Dans le cas de la simulation de la Section 1.3.1 pour laquelle on utilise des pas de temps locaux, on retrouve des grandeurs du même ordre. L’écart relatif, par rapport au calcul en un seul domaine ( $fd$ ), est de moins de 1 % pour  $x_s$ ,  $\alpha_s$  et le flux moyen de masse de vapeur  $\rho_{g_s} \mathbf{v}_{g_s}$  en sortie du générateur. Pour  $Q_s$ , cet écart est inférieur à  $5 \cdot 10^{-2}$  %. Pour l’ensemble du domaine de calcul, l’écart en norme  $L^2$  :  $|\zeta_{fd} - \zeta_{ddm}|_{L^2} / |\zeta_{fd}|_{L^2}$ , cf. Table A.2, est inférieur à

	$\alpha_s$	$Q_s$ ( $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ )	$T_{p_s}$ (K)	$x_{bc}$	$x_{bf}$
Référence	$74.9 \cdot 10^{-2}$	65.85	355.87	$-4.04 \cdot 10^{-2}$	$-4.80 \cdot 10^{-2}$
2 sous-domaines	$74.9 \cdot 10^{-2}$	65.85	355.85	$-4.03 \cdot 10^{-2}$	$-4.79 \cdot 10^{-2}$
4 sous-domaines	$74.7 \cdot 10^{-2}$	65.85	355.79	$-4.02 \cdot 10^{-2}$	$-4.78 \cdot 10^{-2}$
8 sous-domaines	$75.2 \cdot 10^{-2}$	65.85	355.86	$-4.03 \cdot 10^{-2}$	$-4.79 \cdot 10^{-2}$
16 sous-domaines	$75.4 \cdot 10^{-2}$	66.28	355.87	$-4.00 \cdot 10^{-2}$	$-4.76 \cdot 10^{-2}$
32 sous-domaines	$75.8 \cdot 10^{-2}$	67.28	355.95	$-4.08 \cdot 10^{-2}$	$-4.84 \cdot 10^{-2}$

TAB. A.1 – Précision du calcul en décomposition de domaine de la maquette d'un générateur de vapeur (Clotaire) en fonction du nombre de sous-domaines. Partition avec recouvrement des sous-domaines ;  $\epsilon_{st} = 10^{-5}\text{s}^{-1}$  ;  $n_{cp} = 20$ . Le critère de régime stationnaire n'est pas complètement atteint pour les décompositions en 16 et 32 sous-domaines (respectivement :  $5 \cdot 10^{-5}$  et  $3 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$ ). La référence est le calcul sans décomposition de domaine.

Sous-domaine	G (%)	H (%)	P (%)
Partie haute (chignon)	0,7	0,06	0,02
Partie droite (centrale)	3,8	0,11	0,01
Partie basse (entrée)	2,7	0,08	0,04

TAB. A.2 – Précision du calcul en décomposition de domaine de la maquette d'un générateur de vapeur (Clotaire) pour le cas d'une décomposition en trois sous-domaines sans recouvrement et pas de temps locaux.

4 %,  $10^{-1}$  % et  $4 \cdot 10^{-2}$  %, respectivement, pour  $\zeta = G, H$  et  $P$  ; ce qui est satisfaisant pour nos applications industrielles.

Ensuite, d'un point de vue local, la figure A.2 illustre la précision des simulations en décomposition de domaine avec recouvrement de la Table A.1 dans le cas  $N_s = 8$ . On peut noter un léger écart de la vitesse massique vis-à-vis de la référence aux alentours de la cote 4,5 m dans la zone du front d'ébullition. Il en est de même pour l'enthalpie spécifique. Pour cette variable, cet écart se conserve au-delà de cette cote. Il ne représente toutefois que quelques pour mille. Il est probable que cela est dû à la mise en œuvre de la décomposition de domaine pour le primaire qui nécessite un transfert des températures primaires du maillage curviligne au maillage volumique du secondaire.

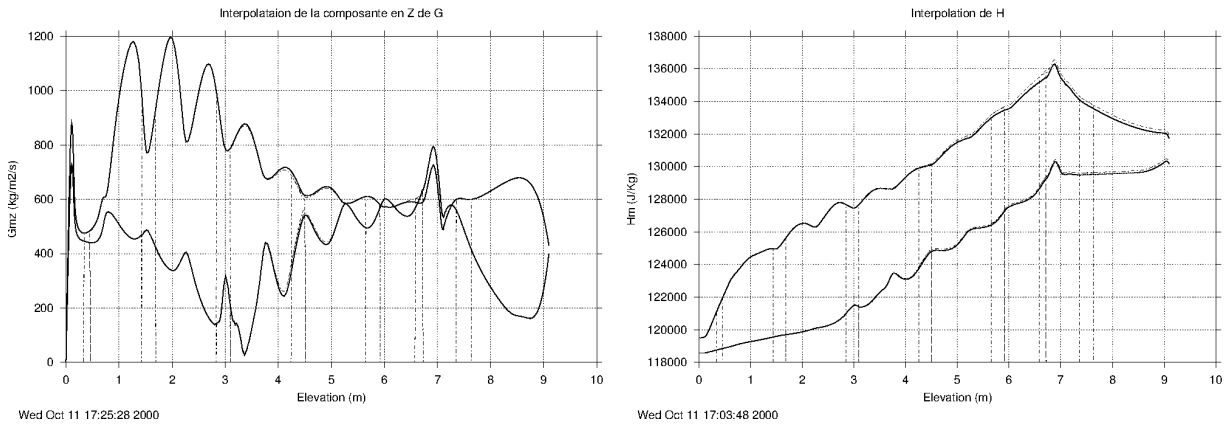


FIG. A.2 – A gauche : comparaison des profils suivant deux lignes verticales d'une composante de la vitesse massique calculée en décomposition de domaine (courbes en pointillés) avec celle de la solution du calcul en un seul domaine (courbes en trait pleins). A droite : idem pour l'enthalpie spécifique. Partition en  $N_s = 8$  sous-domaines avec recouvrement de la maquette Clotaire. Période de couplage  $n_{cp} = 20$ .  $\epsilon_{st} = 10^{-5}\text{s}^{-1}$ .



**Remarque A.2** Si le pas de temps intervient dans un autre terme que le terme inertiel, il peut y avoir localement de légers écarts entre la solution stationnaire obtenue par le calcul complet en un seul domaine et celle du calcul en décomposition de domaine avec des pas de temps différents par sous-domaine. C'est en particulier le cas de la correction BTD du solveur Navier-Stokes de Généripi, cf. Eq. (A.7), qui peut introduire des diffusions parasites locales vis-à-vis de la solution du calcul en un seul domaine. Ceci est illustré sur la Fig. A.3.

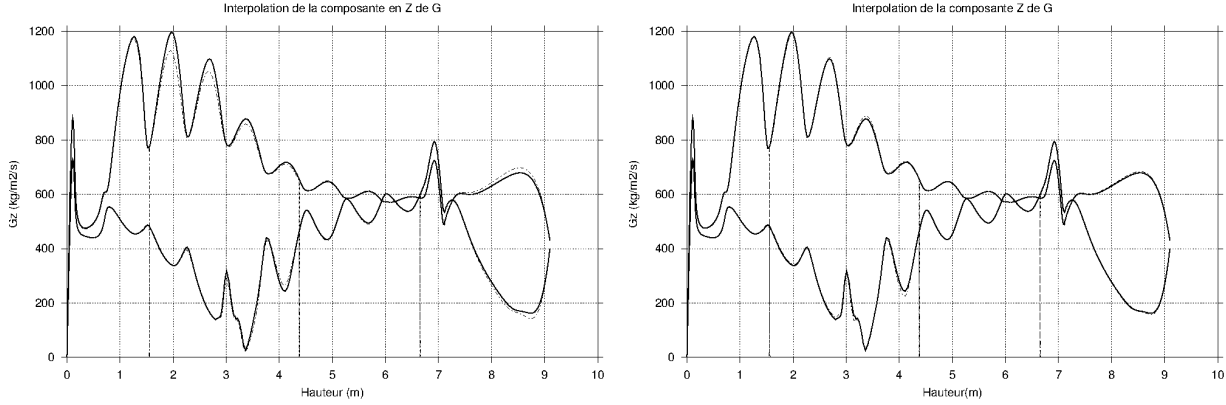


FIG. A.3 – Comparaison des profils suivant deux lignes verticales d’une composante de la vitesse massique calculée en décomposition de domaine (courbes en pointillées) avec celle de la solution du calcul en un seul domaine (courbes en trait pleins). Partition en  $N_s = 4$  sous-domaines sans recouvrement de la maquette Clotaire (129 536 éléments). A gauche : calcul en décomposition de domaine à CFL fixe. A droite : calcul en décomposition de domaine à  $\delta t$  fixe.

## A.5 MÉTHODES MULTI-GRILLES ALGÈBRIQUES

Les méthodes multi-grilles algébriques (*Algebraic MultiGrid*, AMG) sont des méthodes multi-grilles pour la résolution de systèmes linéaires, qui construisent une séquence de matrices *grossières* à partir d’un regroupement des coefficients de la matrice à inverser sur la grille fine.

Afin d’améliorer la résolution du système linéaire en pression, cf. Eq. (A.6) – étape de projection de Généripi–, ou dans le cas de l’utilisation d’une pénalisation de type  $L^2$  – matrices mal conditionnées –, j’ai évalué l’intérêt de méthodes multi-grilles algébriques telles que BoomerAMG (Henson et Yang 2002).

D’une façon générale, l’utilisation en solveur de BoomerAMG ou de solveurs géométriques de type CS sur ces cas tests ne conduit pas à des résultats nettement meilleurs que ceux obtenus avec un gradient conjugué préconditionné par la diagonale.

Ces méthodes sont nettement plus performantes en tant que préconditionneur du gradient conjugué : des gains en temps CPU de 30 % (BoomerAMG) à 80 % (CS géométrique) ont été observés (Belliard 2005). La robustesse de BoomerAMG vis-à-vis d’un défaut de conditionnement est également à souligner. Cependant l’utilisation en ‘boîte noire’ est difficile et l’optimisation du jeu de paramètres de la méthode est parfois lourd. Cela est particulièrement vrai pour l’AMG (type de cycle, méthode et nombre d’itérations de lissage, méthode d’agglomération et seuils, ...).

## A.6 PRÉCONDITIONNEUR ONDELETTE/MULTI-RÉSOLUTION

J'ai effectué des recherches portant sur un solveur ondelette/multi-résolution en tant que preconditionneur d'une méthode de Krylov pour résoudre des systèmes linéaires liés à une EDP de type diffusion-réaction (interactions avec A. Cohen et Y. Maday de Paris VI lors du CEMRACS'98).

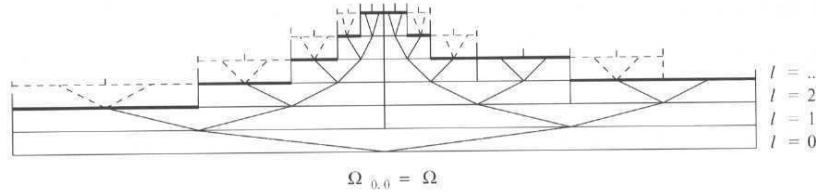


FIG. A.4 – Arbre multi-résolution. En abscisses les positions spatiales (1D) et en ordonnées les échelles. Les grandes échelles correspondent aux petites valeurs de  $l$ . La case  $l = 0$  correspond à la valeur moyenne et chaque case, pour  $l > 0$ , correspond à un détail.

L'analyse ondelette/multi-résolution a été introduite par Harten (1995) – cf. également Cohen et al. (2000), Müller (2002). Décrit brièvement, le principe de l'analyse multi-résolution est de réaliser une décomposition en échelles – sur des fonctions d'échelle; par exemple en 1D, de forme "chapeau" ou créneau – puis en détails – différences entre fonctions d'échelle de deux niveaux  $l$  successifs. La seconde étape correspond à une projection dans une base d'ondelettes. Une variable est donc décrite par une valeur moyenne de base plus des détails, cf. Figure A.4. Il est alors possible de réaliser un traitement spécifique sur les détails de chaque échelle (préconditionnement, évolution en temps, ...).

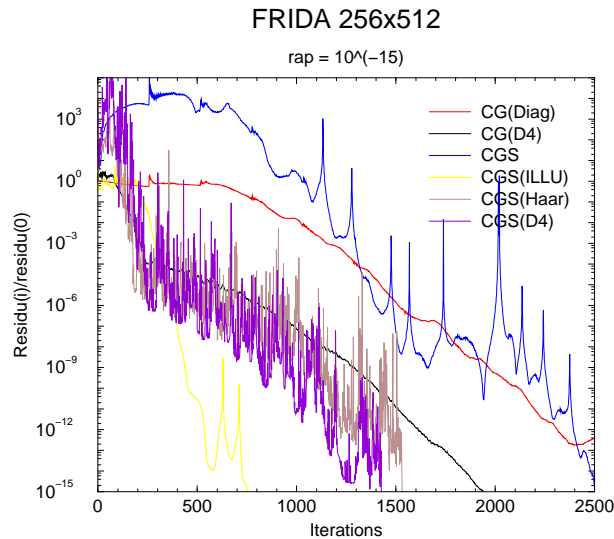


FIG. A.5 – Préconditionnement ondelette d'une méthode itérative de résolution d'un système linéaire (maillage 2D structuré et régulier 256 x 512). Historique de convergence en fonction des itérations. CG : gradient conjugué, CGS : gradient conjugué carré, (Diag) : preconditionneur diagonal, (D4) : preconditionneur ondelette Daubechies D4, (Haar) : preconditionneur ondelette Haar, (ILLU) : preconditionneur LU incomplet.

Pour la résolution d'un système linéaire issu d'une équation de type elliptique sur un maillage cartésien – afin d'avoir une décomposition tensorielle de l'espace – un preconditionneur simple est celui dit en *scaling*. La démarche est de décomposer le résidu du système linéaire dans la base des ondelettes, de le preconditionner par une matrice diagonale en  $2^{-2(l+1)}$  où  $2^{-l}$  est

l'échelle ( $\equiv$  pas d'espace) au niveau  $l$ , puis de revenir dans la base de départ.

L'application à un cas typique de Génèpi met en évidence une forte accélération de la convergence de la méthode itérative en terme du nombre d'itérations (Belliard et al. 2000). Mais les performances du préconditionneur restent, dans ce cas, en deçà de celles d'un LU incomplet – ici la méthode ILLU (Van Der Vorst et Meijerink 1981) –, cf. Figure A.5. Cependant, la mise en œuvre du préconditionneur ondelette est très rapide et ne nécessite pas le calcul de la décomposition ILLU qui, bien que pouvant être faite une seule fois à l'initialisation du calcul, est coûteuse en temps CPU et en place mémoire.

## A.7 ANALYSE DE L'ALGORITHME MULTI-GRILLES PARALLÈLE EN DAMIERS

Nous analysons ici le comportement de l'algorithme multi-grilles parallèle en damiers, cf. Fig. 2.3 de la Section 2.2.3. Cette analyse généralise celle faite dans Belliard (2006) pour trois grilles.

Notons  $u_l$  les variables aux nœuds ( $H_l$  et  $\vec{G}_l$ ) et  $w_l$  les variables aux éléments ( $T_{p_l}$  et  $P_l$ ) de la grille  $\Omega_l$ ; ainsi que  $It_{cp_l}(\dots; xxx)$  l'action de  $cp_l$  itérations de lissage, à partir de l'approximation initiale "...", d'une EDP corrigée, dont la correction utilise le terme "xxx". Et remarquons que  $m$  cycles multi-grilles correspondent à  $m cp_l$  pas de temps sur  $\Omega_l$ .

A la fin du cycle multi-grilles  $m + 1$ ,  $m > 0$ , la variable  $(u_l)^{m+1} \equiv u_l^{(m+1)cp_l}$ ;  $0 < l < l_{max}$ , est égale à :

$$u_l^{(m+1)cp_l} = It_{cp_l}( u_l^{m cp_l} + P_l^{l+1}(u_{l+1}^{m cp_{l+1}} - R_{l+1}^l u_l^{(m-1)cp_l}) \quad (A.30)$$

$$; R_l^{l-1}(u_{l-1}^{m^* cp_{l-1}}, w_{l-1}^{m^* cp_{l-1}}, r_{l-1}^{m^* cp_{l-1}}) ). \quad (A.31)$$

L'indice  $m^*$  vaut  $m^* = m + 1$  dans le cas d'un algorithme purement séquentiel, ce qui conduit à :

$$u_l^{(m+1)cp_l} = It_{cp_l}( (I_l - P_l^{l+1} R_{l+1}^l) u_l^{m cp_l} + P_l^{l+1} u_{l+1}^{m cp_{l+1}} \quad (A.32)$$

$$; R_l^{l-1}(u_{l-1}^{(m+1)cp_{l-1}}, w_{l-1}^{(m+1)cp_{l-1}}, r_{l-1}^{(m+1)cp_{l-1}}) ) \quad (A.33)$$

avec  $I_l$  l'opérateur identité. Dans le cas d'un algorithme purement parallèle, on a  $m^* = m$  :

$$u_l^{(m+1)cp_l} = It_{cp_l}( (u_l^{m cp_l} - P_l^{l+1} R_{l+1}^l u_l^{(m-1)cp_l}) + P_l^{l+1} u_{l+1}^{m cp_{l+1}} \quad (A.34)$$

$$; R_l^{l-1}(u_{l-1}^{m cp_{l-1}}, w_{l-1}^{m cp_{l-1}}, r_{l-1}^{m cp_{l-1}}) ). \quad (A.35)$$

Pour l'algorithme en damiers ( $0 < l < l_{max} - 1$  et  $\Omega_{l+1}$  appartenant au groupe contenant  $\Omega_{l_{max}}$ ) :

$$u_l^{(m+1)cp_l} = It_{cp_l}( (I_l - P_l^{l+1} R_{l+1}^l) u_l^{m cp_l} + P_l^{l+1} u_{l+1}^{(m+1)cp_{l+1}} \quad (A.36)$$

$$; R_l^{l-1}(u_{l-1}^{(m+1)cp_{l-1}}, w_{l-1}^{(m+1)cp_{l-1}}, r_{l-1}^{(m+1)cp_{l-1}}) )$$

$$u_{l+1}^{(m+1)cp_{l+1}} = It_{cp_{l+1}}( (I_{l+1} - P_{l+1}^{l+2} R_{l+2}^{l+1}) u_{l+1}^{m cp_{l+1}} + P_{l+1}^{l+2} u_{l+2}^{m cp_{l+2}} \quad (A.37)$$

$$; R_{l+1}^l(u_l^{m cp_l}, w_l^{m cp_l}, r_l^{m cp_l}) ).$$

La correction de  $u_l^{mcp_l}$  est donc :

$$(I_l - P_l^{l+1} R_{l+1}^l) u_l^{mcp_l} + P_l^{l+1} u_{l+1}^{mcp_{l+1}} \text{ dans le cas séquentiel,} \quad (\text{A.38})$$

$$u_l^{mcp_l} - P_l^{l+1} R_{l+1}^l u_l^{(m-1)cp_l} + P_l^{l+1} u_{l+1}^{mcp_{l+1}} \text{ dans le cas purement parallèle et} \quad (\text{A.39})$$

$$(I_l - P_l^{l+1} R_{l+1}^l) u_l^{mcp_l} + P_l^{l+1} u_{l+1}^{(m^*)cp_{l+1}} \text{ dans le cas parallèle en damiers} \quad (\text{A.40})$$

avec  $m^* = m + 1$  ou  $m^* = m$  en fonction de l'indice de la grille. En ce qui concerne le filtre passe-haut  $(I_l - P_l^{l+1} R_{l+1}^l) u_l^{mcp_l}$ , la correction pour l'algorithme en damiers est donc synchrone, contrairement au cas purement parallèle. La variation des termes correctifs des équations de bilan d'un index de grille à l'autre, Eqs (A.36)-(A.37), conduit à un algorithme aux caractéristiques intermédiaires entre celles d'un algorithme purement séquentiel et celles d'un algorithme purement parallèle. On s'attend donc à une convergence intermédiaire entre celles de ces deux algorithmes.

## A.8 ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DE L'ALGORITHME BI-GRILLES PSEUDO-FMG FAS

On illustre ici la sensibilité de l'algorithme bi-grilles pseudo-FMG FAS à deux paramètres clefs : le coefficient de relaxation  $\alpha_0$  et le nombre d'itérations de lissage  $(cp_0; cp_1)$ .

### Paramètre de relaxation

La relaxation introduite par Eq. (2.11) est un point crucial pour la simulation de la maquette Clotaire comme le montre la Figure A.6 (à gauche). De toute évidence, le choix de  $\alpha_0$  dans l'intervalle  $[0,4; 0,9]$  conduit à des historiques de convergence<sup>7</sup> relativement semblables. Une valeur supérieure -ici 0,95 ou 1- conduit à la divergence du calcul.

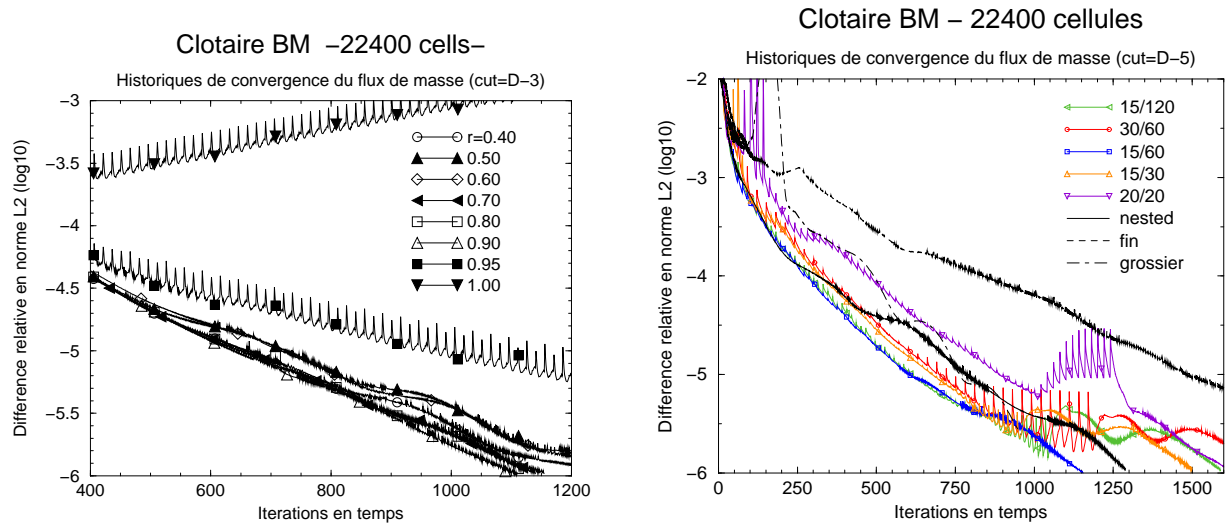


FIG. A.6 – Méthode bi-grilles Pseudo-FMG FAS : sensibilité aux paramètres de calcul. Comparaison des historiques de convergence du flux de masse sur  $\Omega_0$  en fonction du paramètre de relaxation  $\alpha_0$  (noté ici  $r$ ; à gauche) ou du nombre d'itérations de lissage  $(cp_0; cp_1)$  (noté ici  $cp_0/cp_1$ ; à droite). Simulation de la maquette Clotaire; 22 400 cellules. Critère de cycle dynamique  $\epsilon_1^{MG}$  fixé à  $= 10^{-3}$  (à gauche) ou  $= 10^{-5}$  (à droite).

<sup>7</sup>Convergence mesurée via le terme de gauche de l'inéquation (A.3).

### Lisseur

**Choix du lisseur** Le lisseur intervenant dans la méthode multi-grilles doit réduire au mieux les hautes fréquences de l'erreur et être le moins gourmand possible en temps CPU. Ici, j'utilise comme lisseur non linéaire des itérations relaxées de Picard, cf. Eq.(A.2), incorporant des itérations<sup>8</sup> de gradient conjugué (GC) préconditionné par l'inverse de la diagonale. A titre d'illustration, remplacer les itérations de GC par celles d'un algorithme de Richardson plus économe en temps CPU :

$$u_l^{j+1} = u_l^j - \alpha r_l(u_l^j) \quad (\text{A.41})$$

avec  $r_l(\cdot)$  le résidu sur  $\Omega_l$  et  $j$  le numéro de l'itération, ne conduit pas à un gain de temps important. Des tests réalisés en conservant constant le paramètre  $\alpha$ , lié aux valeurs propres de l'opérateur, sur 5 itérations ne conduisent qu'à une réduction du temps CPU d'environ 3%.

**Nombre d'itérations de lissage** Ayant un impact beaucoup plus important sur le temps de calcul, le choix du nombre d'itérations de lissage (i.e. de Picard)  $cp_l$  sur chaque grille est essentiel pour optimiser les calculs. La Figure A.6, à droite, illustre ce point. Pour cette simulation, le couple ( $cp_0 = 15$ ;  $cp_1 = 60$ ) est optimal.

---

<sup>8</sup>Généralement au nombre de 5.

# BIBLIOGRAPHIE

- M. Albers. A local mesh refinement multigrid method for 3-D convection problems with strongly variable viscosity. *Journal of Computational Physics*, 160(1) :126–150, 2000. (Cité page 37.)
- Ph. Angot. Parallel multi-level and domain decomposition methods. *Calculateurs parallèles*, 6 (4) :9–14, 1994. (Cité page 18.)
- Ph. Angot. A model of fracture for elliptic problems with flux and solution jumps. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I Math.*, 337 (6) 425-430, 2003. (Cité pages 65 et 66.)
- Ph. Angot. A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 341(11) :683–688, 2005. (Cité pages 66 et 67.)
- Ph. Angot. A fictitious domain model for the Stokes/Brinkman problem with jump embedded boundary conditions. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser Math.*, 348(11-12) :697–702, 2010. (Cité pages 65 et 77.)
- Ph. Angot. On the well-posed coupling between free fluid and porous viscous flows. *Applied Mathematics Letters*, 24 :803–810, 2011. (Cité page 77.)
- Ph. Angot, Ch.-H. Bruneau, et P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999. (Cité page 69.)
- Ph. Angot, J.-P. Caltagirone, et P. Fabrie. Vector Penalty-Projection Methods for the Solution of Unsteady Incompressible Flows. Dans *Finite Volumes for Complex Applications V*, pages 169–176, Aussois, France, June 08-13 2008. Wiley. (Cité pages 69 et 77.)
- Ph. Angot, J.-P. Caltagirone, et P. Fabrie. A Spectacular Vector Penalty-Projection Methods for Darcy and Navier-Stokes Problems. Dans *Finite Volumes for Complex Applications VI*, Prague, Czech Republic, July 01-23 2011. Wiley. (Cité page 77.)
- Ph. Angot, J. P. Caltagirone, et K. Khadra. Une méthode adaptative de raffinement local : la correction du flux à l’interface. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 315 :739–745, 1992. (Cité pages 46, 50 et 52.)
- Ph. Angot, J. P. Caltagirone, et K. Khadra. A comparison of locally adaptive multigrid methods : L.D.C., F.A.C. and F.I.C. Dans *NASA Conf. Publ.CP-3224*, volume 1, pages 275–292, 1993. (Cité pages 48 et 50.)
- Satish Balay, Jed Brown, Kris Buschelman, Victor Eijkhout, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matthew G. Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, et Hong Zhang. PETSc users manual. Rapport Technique ANL-95/11 - Revision 3.4, Argonne National Laboratory, 2013. (Cité page 83.)
- M. Belliard. Two-phase flow steam generator simulations on parallel computers using Domain Decomposition Method. Dans *4th Meeting on Supercomputing for Nuclear Applications SNA’03*, Paris, France, September, 22-24 2003. (Cité pages 12, 18, 27 et 31.)
- M. Belliard. Tests des méthodes multigrilles algébriques de Numerical Platon/Hypre. Rapport Technique DTN/SMTM/LMTR/2005-120, CEA, Cadarache, France, 2005. (Cité page 88.)

- M. Belliard. Multigrid preconditioning of the steam generator two-phase mixture balance equations in the Genepi software. *Progress in Comp. Fluid Dyn.*, 6(8) :459–474, 2006. (Cité pages 31, 35, 37, 39, 42 et 90.)
- M. Belliard. Fictitious Domain Method and Adaptive Mesh Refinement for nuclear component CFD simulations in the context of the Neptune project. Dans *XIXème Congrès Français de Mécanique (CFM'09)*, Marseille, France, August 24–28 2009. (Cité pages 46, 64 et 70.)
- M. Belliard. A hybrid collocated/staggered version of the fast vector-penalty projection method for dilatable fluids. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 352 :761–766, 2014. (Cité page 78.)
- M. Belliard et C. Fournier. Penalized direct forcing and projection schemes for navier stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 348(19-20) :1133–1136, 2010. (Cité pages 64, 65, 68, 69 et 70.)
- M. Belliard, P. Giroud, et H. Selmi. Wavelet preconditioning of the energy balance equation in the GENEPI software. Rapport Technique DTP/SMET/LMTA/2000/27, CEA, Cadarache, France, 2000. (Cité page 90.)
- M. Belliard et M. Grandotto. Two-phase fluid flow computation in steam generator using a domain decomposition method. Dans *Computational Fluid Dynamics98, Proceeding of the Fourth European Fluid Dynamics Conference*, volume 1, pages 186–191, Athens, Greece, September 1998. Wiley. (Cité pages 12 et 18.)
- M. Belliard et M. Grandotto. Computation of two-phase flow in steam generator using domain decomposition and local zoom methods. Dans *8th International Conference on Nuclear Engineering*, Baltimore, MD, USA, April 2000. (Cité pages 12, 18 et 46.)
- M. Belliard et M. Grandotto. Computation of two-phase flow in steam generator using domain decomposition and local zoom methods. *Nuclear Engineering and Design*, 213(2-3) :223–239, 2002. (Cité pages 12, 14, 18 et 46.)
- M. Belliard et M. Grandotto. Local Zoom Computation of Two Phase Flows in Steam Generators using a Local Defect Correction Method. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 43 (2) :111–135, 2003a. (Cité pages 46, 54 et 59.)
- M. Belliard et M. Grandotto. Multigrid preconditioning of the steam generator two-phase mixture balance equations in the GENEPI software. Dans *10th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics NURETH-10*, Seoul, Korea, October, 5-9 2003b. (Cité page 31.)
- M. Belliard et C. Introïni. Trio\_u thermal-hydraulic simulations of flows induced by a stirrer and bubbling in a molten glass bath. Dans *Joint EUROMECH / ERCOFTAC Colloquium 549, Immersed Boundary Methods : Current Status and Future Research Directions*, Leiden, Nederland, June 17-19 2013. (Cité pages 64, 66, 70 et 71.)
- M. Belliard et I. Ramière. Fictitious domain simulations for the two-phase flow energy balance of the clotaire steam generator mock-up. Dans *12th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-12)*, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., September 30 - October 4 2007. (Cité pages 64 et 70.)
- M. Belliard et I. Ramière. Fictitious domain methods for two-phase flow energy balance computations in nuclear components. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68(8) : 939–957, 2012. (Cité pages 64, 66 et 70.)
- M. Belliard et B. Sécher. An unified linear equation solvers interface for industrial softwares. Dans *Parallel Matrix Algorithms and Applications*, IRISA Rennes, September 7-9 2006. (Cité page 83.)

- P.E. Bjørstad et O.B. Widlund. Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 23 :1097–1120, 1986. (Cité page 85.)
- J.F. Bourgat, R. Glowinski, P. Le Tallec, et M. Vidrascu. Variational Formulation and Algorithm for Trace Operator in Domain Decomposition Calculations. Dans *Second International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 3–16, Philadelphia, USA, 1989. SIAM. (Cité page 85.)
- J. H. Bramble, J. E. Pasciak, et J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.* 55, pp 1-22, 1990. (Cité page 34.)
- A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138) :333–390, 1977. (Cité pages 32 et 35.)
- A.N. Brooks et Th.J.-R. Hughes. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3) :199–259, 1982. (Cité page 82.)
- J.-P. Caltagirone et J. Breil. Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II*, 327(11) :1179–1184, 1999. (Cité page 77.)
- C. Calvin. A development framework for parallel CFD applications : Trio\_U project. Dans *SuperComputing in Nuclear Applications (SNA-2003)*, Paris, France, 2003. (Cité page 66.)
- J.L. Campan et J.C. Bouchter. Steam generator experiment for advanced computer code qualification : CLOTAIRE international program. Dans *Third International Topical Meeting on Nuclear Power Plant Thermohydraulics and Operations*, Seoul, April 1988. (Cité page 16.)
- C. Carlenzoli et A. Quarteroni. Adaptive domain decomposition methods for advection-diffusion problems. In Babuska I. e. a. (ed) *Modeling, Mesh Generation and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations*, volume 75 of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pages 165–199, Springer verlag edition, 1995. (Cité page 14.)
- A. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22 : 745–762, 1968. (Cité pages 69 et 81.)
- S. Clerc. Numerical simulation of the homogeneous equilibrium model for two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 161(1) :354–375, 2000. (Cité page 5.)
- A. Cohen, N. Dyn, S. M. Kaber, et M. Postel. Multiresolution Schemes on Triangles for Scalar Conservation Laws. *Journ. of Comp. Physics*, 161 :264–286, 2000. (Cité page 89.)
- V. Dolean, S. Lanteri, et F. Nataf. Optimized Interface Conditions for Domain Decomposition Methods in Fluid Dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 40 :1539–1550, 2002. (Cité page 76.)
- E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, et J. Mohd-Yusof. Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. *Journal of Computational Physics*, 161 :35 – 60, 2000. (Cité page 68.)
- R. Falgout et co workers. Hypre library. [http://www.llnl.gov/CASC/linear\\_solvers/](http://www.llnl.gov/CASC/linear_solvers/). (Cité page 83.)
- R. P. Fedorenko. A relaxation method for solving elliptic difference equations. *USSR Computational Math. and Math. Phys.*, 1 :1092, 1962. (Cité page 32.)



- P. Ferket et A. Reusken. Further analysis of the local defect correction method. *Computing*, 56 (2) :117– 139, 1996. (Cité page 47.)
- Joel H. Ferziger et M. Peric. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, New York, USA, 1996. (Cité page 81.)
- L. Gastaldi, F. Gastaldi et A. Quarteroni. ADN and ARN domain decomposition methods for advection-diffusion equations. Ninth International Conference on Domain Decomposition Methods, Editor Petter Bjorstad, Magne S. Espedal and David E. Keyes., 1998. (Cité pages 14 et 16.)
- G. A. Geist, J. A. Kohl, et P. M. Papadopoulos. PVM and MPI : A Comparison of Features. *Calculateurs Paralleles*, 8(2) :137–150, 1996. (Cité page 13.)
- K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two and three dimensional cavity flows. *J. Comput. Physics.*, 30 :76–95, 1979. (Cité page 81.)
- M. Grandotto, M. Bernard, J.P. Gaillard, J.L. Cheissoux, et E. De Langre. A 3D finite element analysis for solving two-phase flow problems in PWR steam generators. Dans *7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems*, Huntsville, Alabama, USA, November 1989. (Cité page 5.)
- M. Grandotto et P. Obry. Calculs des écoulements diphasiques dans les échangeurs par une méthode aux éléments finis. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 5(1) :53–74, 1996. (Cité pages 5 et 6.)
- M. Grandotto et P. Obry. Steam Generator Two-Phase-Flow Numerical Simulation with Liquid and Gas Momentum Equations. *Nuclear Science and Engineering*, 151 :313–318, 2005. (Cité page 5.)
- P.M. Gresho. Incompressible Fluid Dynamics : Some Fundamental Formulation Issue. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 23(1) :413–453, 1991. (Cité pages 37 et 81.)
- P.M. Gresho, S.J. Chan, R. L. Lee, et C.D Upson. A modified Finite Element Method for Solving the Time-Dependent Incompressible Navier Stokes Equations (Part 1 : Theory). *Int. J. Num. Methods in Fluids*, 4(6) :557–598, 1984. (Cité pages 37, 81 et 82.)
- W. Gulden, S. Nisan, M.-T. Porfiri, I. Toumi, et T. Boubée de Gramont. ITER safety analyses with ISAS. *Journal of Fusion Energy*, 16(1-2) :75–83, 1997. (Cité page 13.)
- W. Hackbusch. Local defect correction method and domain decomposition techniques. volume 5 de *Computing Suppl.*, pages 89–113. Springer-Verlag (Wien), 1984. (Cité pages 46 et 48.)
- W. Hackbusch. Multigrid Methods and applications. *Series in computer mathematics*, Springer-Verlag, 1985. (Cité page 46.)
- A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48 :1305–1342, 1995. (Cité page 89.)
- V. E. Henson et U. M. Yang. BoomerAMG : a parallel algebraic multigrid solver and preconditioner. Dans *Developments and trends in iterative methods for large systems of equations.*, volume 41, Issue 1 de *Applied Numerical Mathematics*, pages 155 – 177. Elsevier Science Publishers B. V, Amsterdam, The Netherlands, April 2002. (Cité page 88.)
- R. Herbin, W. Kheriji, et J.C. Latché. Staggered schemes for all speed flows. Dans *ESAIM : PROCEEDINGS*, volume 35, pages 122–150, March 2012. (Cité page 78.)

- R. Herbin, W. Kheriji, et J.C. Latché. Consistent pressure correction staggered schemes for the shallow water and euler equations. *submitted to M2AN*, 2013. (Cité page 78.)
- G. Iaccarino et R. Verzicco. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. *Appl. Mech. Rev.*, 56(3) :331 – 347, 2003. (Cité page 77.)
- T. Ikeno et T. Kajishima. Finite-difference immersed boundary method consistent with wall conditions for incompressible turbulent flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 226 :1485 – 1508, 2007. (Cité page 69.)
- C. Introïni, M. Belliard, et C. Fournier. Hybrid cartesian/immersed boundary flow simulations using a second order Penalized Direct Forcing method. Dans *6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and engineering, ECCOMAS 2012, MS625 mini-symposium 'High order fictitious domain methods : basic principles and engineering applications'*, Vienna, Austria, September 10-14 2012. (Cité page 64.)
- C. Introïni, M. Belliard, et C. Fournier. A Second Order Penalized Direct Forcing for Hybrid Cartesian/Immersed Boundary Flow Simulations. *Computers and Fluids*, 90 :21–41, 2014. (Cité pages 64, 65, 66, 70 et 71.)
- K. Khadra, Ph. Angot, S. Parneix, et J.P. Caltagirone. Fictitious Domain Approach for Numerical Modelling of Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 34(8) :651–684, 2000. (Cité pages 65 et 69.)
- P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. volume 1 de *Computational Mechanics advances*, pages 121–220. North-Holland, Elsevier Science, 1994. (Cité pages 83, 84 et 85.)
- G. S. Lellouche et B. A. Zolotar. Mechanistic Model For Predicting Two-Phase Void Fraction For Water in Vertical Tubes, Channels, and Rod Bundles. Special Report NP 2246-SR, EPRI, 1982. (Cité page 6.)
- R. J. LeVeque et Z. Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :1019–1044, 1994. (Cité page 65.)
- P.L. Lions. On the schwarz alternating method, i. Dans R. Glowinski, G. Golub, et J. Périaux, éditeurs, *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, January 7-9 1987, Paris, France, Philadelphia, PA, 1988*. SIAM. (Cité page 83.)
- P.L. Lions. On the schwarz alternating method, iii : a variant for nonoverlapping subdomains. Dans T.F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, et O. Widlund, éditeurs, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, March 20-22 1989, Houston, Texas, Philadelphia, PA, 1990*. SIAM. (Cité pages 12 et 85.)
- G.I. Marchuk. *Methods of Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, USA, 1982 (1rst ed. 1975). (Cité page 64.)
- L.D. Marini et A. Quarteroni. A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numer. Math.*, 55 :575–598, 1989. (Cité page 85.)
- J. Mohd-Yusof. Combined Immersed Boundaries/B-Splines Methods for Simulations of Flows in Complex Geometries. Rapport technique, NASA Ames/Stanford University, 1997. (Cité pages 66 et 68.)
- S. Müller. Adaptive multiresolution schemes. Dans *Finite Volumes for Complex Applications III*, pages 119–134, Porquerolles, France, June 2002. (Cité pages 63, 77 et 89.)

- C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : A numerical method. *J. Comput. Phys.*, 10(2) : 252–271, 1972. (Cité page 65.)
- A. Posa et E. Balaras. Wall modeling strategies for immersed boundary methods. Dans *Joint EUROMECH / ERCOFTAC Colloquium 549, Immersed Boundary Methods : Current Status and Future Research Directions*, Leiden, Nederland, June 17-19 2013. (Cité page 77.)
- A. Quarteroni. Domain decomposition method for the numerical solution of partial differential equations. Rapport Technique UMSI90/246, Supercomputer Institute, University of Minnesota, 1990. (Cité page 27.)
- A. Quarteroni et A. Valli. Domain decomposition methods for partial differential equations. *Computational Fluid Dynamics*, VKI Lecture Series 1996-06, 1996. (Cité page 85.)
- I. Ramière. Convergence analysis of the Q1-finite element method for elliptic problems with non-boundary-fitted meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75 (9) :1007–1052, 2008. (Cité page 68.)
- I. Ramière, Ph. Angot, et M. Belliard. Fictitious domain methods to solve convection-diffusion problems with general boundary conditions. Dans *Proc. in the 17th Computational Fluid Dynamics Conference AIAA*, Toronto, Canada, June 2005a. (Cité pages 46 et 64.)
- I. Ramière, Ph. Angot, et M. Belliard. A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4-6) :766–781, 2007a. (Cité pages 46, 53, 54, 64, 65, 66, 68, 70 et 71.)
- I. Ramière, Ph. Angot, et M. Belliard. A general fictitious domain method with immersed jumps and non-conforming structured mesh. *Journal of Computational Physics*, 225(2) :1347–1387, 2007b. (Cité pages 46, 47, 52, 53, 54, 59, 64, 65, 66, 70 et 71.)
- I. Ramière, M. Belliard, et Ph. Angot. On the simulation of Nuclear Power Plant Components using a fictitious domain approach. Dans *Proc. in the 11th International Topical Meeting on Nuclear Thermal-Hydraulics (NURETH-11)*, Avignon, France, October 2-6 2005b. (Cité pages 46 et 64.)
- O. Roussel et K. Schneider. An adaptive multiresolution method for combustion problems : Application to flame ball-vortex interaction. *Computers and Fluids*, 34 :817–831, 2005. (Cité page 63.)
- V.K. Saul'ev. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. Journal*, 4(4) :912–925, 1963. (Cité page 64.)
- H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. Mac Graw Hill, New York, USA, 1968. (Cité pages 6 et 82.)
- H.A. Schwarz. Ber einen grenzübergang durch alternierendes verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15 :272–286, May 1870. (Cité pages 12 et 83.)
- B. Sécher, M. Belliard, et C. Calvin. Numerical Platon : A unified linear equation solver interface by CEA for solving open foe scientific applications. *Nucl Eng Des.*, 239(1) :87–95, 2009. (Cité page 83.)
- R. Temam. Une méthode d'approximation des solutions des équations de navier-stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 98 :115–152, 1968. (Cité pages 69 et 81.)

- I. Toumi, A. Bergeron, D. Gallo, E. Royer, et D. Caruge. FLICA-4 code : a three-dimensional two-phase flow computer code with advanced numerical methods for nuclear applications. *Nuclear Engineering and Design*, 200(1-2) :139–155, 2000. (Cité page 5.)
- H.A. Van Der Vorst et J.A. Meijerink. Guidelines for the usage of incomplete decompositions in solving linear equations as they occur in practical problems. *Journal of Computational Physics*, 44 :134–155, 1981. (Cité page 90.)
- J.Y. Yang et E. Balaras. An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 215 : 12–40, 2006. (Cité page 77.)
- N. Zuber et J.A. Findlay. Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems. *J. Heat Transfer*, 87(4) :453–468, 1965. (Cité page 6.)



# NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS

AMR	Raffinement adaptatif de maillage ( <i>Adaptive Mesh Refinement</i> en anglais)
$C_p$	Capacité thermique spécifique à pression constante du fluide primaire ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )
CFD	Mécanique des fluides numérique ( <i>Computational Fluid Dynamics</i> en anglais)
DF	Forçage direct ( <i>Direct Forcing</i> en anglais)
EBC	Conditions aux limites immergées ( <i>Embedded Boundary Conditions</i> en anglais)
EF	Éléments finis ( <i>Finite Elements</i> , FE, en anglais)
FAS	Méthode non linéaire multi-grilles ( <i>Full Approximation Storage</i> en anglais)
FMG	Méthode multi-grilles complète ( <i>Full Multigrid</i> en anglais)
FIC	Correction de flux à l'interface ( <i>Flux Interface Correction</i> en anglais)
$h_{eq}$	Coefficient d'échange équivalent entre le fluide primaire et la surface extérieure des tubes -coté secondaire- ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )
$H$	Enthalpie spécifique du mélange ( $\alpha H_g + (1 - \alpha)H_l$ ; $J.kg^{-1}$ )
$H_l$	Enthalpie spécifique du liquide du fluide secondaire ( $J.kg^{-1}$ )
$H_g$	Enthalpie spécifique de la vapeur du fluide secondaire ( $J.kg^{-1}$ )
$H_{ls}(P)$	Enthalpie du liquide secondaire à saturation ( $J.kg^{-1}$ )
$\mathbf{G} (\equiv \rho \mathbf{V})$	Flux de masse du mélange ( $\alpha \rho_g \mathbf{V}_g + (1 - \alpha) \rho_l \mathbf{V}_l$ ; $kg.m^{-2}.s^{-1}$ )
$\mathbf{g}$	Gravitation ( $m.s^{-2}$ )
ISI	Interface épaisse immergée ( <i>Immersed Spread Interface</i> en anglais)
JEBC	Conditions aux limites immergées avec saut ( <i>Jump Embedded Boundary Conditions</i> en anglais)
$\mathcal{L}(P)$	Chaleur latente ( $J.kg^{-1}$ )
LDC	Correction locale du résidu ( <i>Local Defect Correction</i> en anglais)
$P$	Pression du mélange ( $Pa$ )
$P_r$	Nombre de Prandtl ( $P_r = \frac{\lambda_T}{\mu_T}$ )
PDF	Forçage direct pénalisé ( <i>Penalized Direct Forcing</i> en anglais)
$Q(H, P)$	Terme source de chaleur (densité de puissance par $m^3$ de poreux -faisceau primaire-; $W.m^{-3}$ )
QDM	Quantité de mouvement
$S_{ch}$	Surface chauffante (surface externe des tubes) dans la cellule d'homogénéisation ( $m^2$ )
$T_p$	Température du fluide primaire ( $K$ )
$T_w$	Température des tubes du faisceau coté secondaire ( $K$ )
$\mathbf{V}$	Vitesse du mélange ( $m.s^{-1}$ )
$\mathbf{V}_l$	Vitesse du liquide du fluide secondaire ( $m.s^{-1}$ )
$\mathbf{V}_g$	Vitesse de la vapeur du fluide secondaire ( $m.s^{-1}$ )
$\mathbf{V}_p$	Vitesse du fluide primaire ( $m.s^{-1}$ )
$\mathbf{V}_R(H, P)$	Vitesse relative (vitesse de la vapeur moins vitesse du liquide, $m.s^{-1}$ )
VF	Volumes finis ( <i>Finite Volumes</i> , FV, en anglais)
$x(H, P)$	Titre statique du mélange ( $\equiv \frac{H - H_{ls}}{\mathcal{L}}$ )
$\alpha$	Taux de vide (fraction volumique de la vapeur)
$\beta$	Porosité secondaire ( $\beta = (1 - \tau) + \tau \beta_0$ )

$\beta_0$	Porosité secondaire intrinsèque (loin des bords du faisceau ; $\equiv \omega_m/\omega$ )
$\beta_{p0}$	Porosité primaire intrinsèque du faisceau (loin des bords du faisceau ; $\equiv \omega_p/\omega$ )
$\delta t$	Pas de temps ( $s^{-1}$ )
$\gamma_0$	Densité de surface chauffante du faisceau de tubes primaires ( $\equiv S_{ch}/\omega$ )
$\tau$	Taux de présence du poreux -faisceau primaire- dans une cellule de calcul (volume de poreux / volume de la cellule de calcul)
$\omega$	Volume de la cellule d'homogénéisation ( $m^3$ )
$\omega_m$	Volume du mélange (liquide + vapeur) dans la cellule d'homogénéisation ( $m^3$ )
$\omega_p$	Volume du fluide primaire dans la cellule d'homogénéisation ( $m^3$ )
$\chi_T, \mu_T$	Coefficients de diffusion turbulente du mélange ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\chi_{T_p}$	Coefficient de diffusion turbulente du fluide primaire ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\bar{\Lambda}$	Tenseur de frottement sur les obstacles ( $kg.m^{-3}.s^{-1}$ )
$\rho(H, P)$	Densité du mélange ( $\alpha\rho_g + (1 - \alpha)\rho_l$ ; $kg.m^{-3}$ )
$\rho_l(H_l, P)$	Densité du liquide du fluide secondaire ( $kg.m^{-3}$ )
$\rho_g(H_g, P)$	Densité de la vapeur du fluide secondaire ( $kg.m^{-3}$ )
$\rho_p(T_p)$	Densité du fluide primaire ( $kg.m^{-3}$ )
$\varphi$	Fonction de forme trilinéaire par morceau $Q_1$ associée à la discrétisation EF de $H$ et $\mathbf{G}$
$\psi$	Fonction de forme constante par morceau $Q_0$ associée à la discrétisation EF de $P$
$\ f\ _{L^2}$	Norme $L^2(\Omega)$ continue de $f$ : $\ f\ _{L^2} = (\int_{\Omega} f(x)^2 dx)^{0.5}$ .
$\ f\ _{\infty}$	Norme max continue de $f$ : $\ f\ _{\infty} = \sup_{x \in \Omega}  f(x) $ .





**Titre** Méthodes de décomposition de domaine et de frontière immergée pour la simulation des composants nucléaires

**Résumé** L'objet de ce document est de présenter mes travaux de recherche en vue de l'*Habilitation à Diriger les Recherches*. Je ne décris ici que ceux concernant la simulation numérique de la thermohydraulique diphasique des générateurs de vapeur des centrales nucléaires. Ils concernent la mise en place de méthodes de calcul Haute Performance, dans le cadre des modèles HEM (*Homogeneous Equilibrium Model*) ou HRM (*Homogeneous Relaxation Model*) en milieux poreux ou libres, avec un schéma numérique de type elliptique en éléments finis ou en volumes finis, pour la simulation des générateurs de vapeur des centrales nucléaires françaises à eau pressurisée. Ces travaux recouvrent deux thématiques : la décomposition du domaine de calcul en espace et/ou en fréquence, comme les méthodes multi-grilles non-linéaires ou le raffinement local de maillage multi-niveaux, et les méthodes de domaine fictif. L'application de ces recherches permettent d'accroître de façon significative les capacités des simulations industrielles des générateurs de vapeur. Elles sont potentiellement applicables aux autres composants d'une centrale nucléaire (la cuve par exemple) ou aux différents types d'échangeurs de chaleur rencontrés dans l'industrie.

**Mots-clés** Modélisation, Mécanique des fluides, Éléments finis, Volumes finis, Méthodes Multi-grilles, Décomposition de domaines, Domaines fictifs, Raffinement local de maillages, Ondelettes, Multi-résolution, Parallélisme.